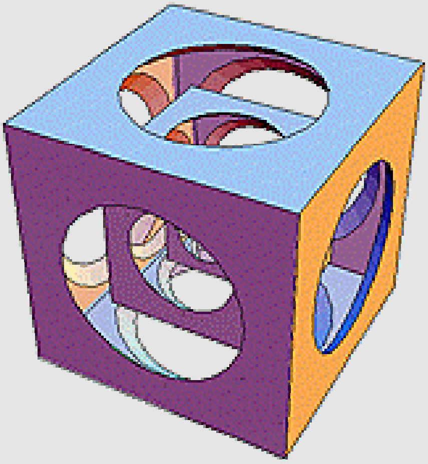


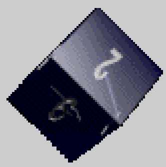
Material Didático

Série Probabilidade



Introdução

Enfoque: Exatas



Prof. Lorí Viali, Dr.

SUMÁRIO

1. COMBINATÓRIA

1.1. CONJUNTOS

As idéias básicas da teoria dos conjuntos foram desenvolvidas pelo Matemático Alemão **Georg Cantor** (1845-1918) em 1875 mais ou menos.

A palavra conjunto é indefinida. Para escrever um conjunto usam-se chaves. Os elementos de um conjunto são escritos separados por vírgula e a ordem em que são escritos é irrelevante. Se o conjunto é infinito usa-se três pontos para indicar o fato. O nome de um conjunto é escrito com letra maiúscula, enquanto os dos seus elementos com letra minúscula. Alguns conjuntos tem representação especial como, por exemplo, o conjunto dos números naturais: ℵ.

O número de elementos de um conjunto é denominado de **número cardinal** ou simplesmente **cardinal** do conjunto. Representa-se por n(A) e lê-se "ene de A".

Em muitas situações existe a idéia declarada ou implícita de um **universo de discurso**. Este universo inclui todas as coisas em discussão a um dado tempo. Com conjuntos, o universo do discurso é denominado de **conjunto universal** ou **conjunto universo.** Este conjunto é normalmente representado pela letra U. O conjunto universo pode variar de situação para situação.

A idéia de conjunto universal foi dada pelo logicista **John Venn** (1834-1923) que desenvolveu diagramas de conjuntos conhecidos como **Diagramas de Venn.** Venn comparou o conjunto universo ao nosso campo de visão. Ele mantém as coisas que focamos e ignora tudo o resto.

1.2. OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

O complemento de um conjunto A, representado por $\overline{A}$ ou A', é o conjunto de todos os elementos de U que **não** são elementos de A, ou

$A' = \{ x \mid x \in U \text{ e } x \notin A \}$

A interseção dos conjuntos A e B, representada por A∩B, é o conjunto formado pelos elementos comuns a A e a B, ou

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B \}$

Dois conjuntos A e B que não possuem elementos em comum, isto é, tais que $A \cap B = \varnothing$ são denominados **conjuntos disjuntos**.

A união de dois conjuntos A e B, representada por AUB, é o conjunto de todos os elementos pertencentes tanto a A quanto a B, ou

$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$

A diferença entre os conjuntos A e B, escrita A - B, é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e não ao B, ou

$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}$

Observação: Ao escrever um conjunto que contém vários elementos, a ordem em que os elementos aparecem não é relevante. Por exemplo, { 5, 1 } = { 1, 5 }. No entanto, existem muitas situações na Matemática onde a ordem de dois ou mais objetos é importante. Isto leva a idéia de **par ordenado**. Quando escrever um par ordenado use parênteses ao invés de chaves que são reservadas para escrever conjuntos.

No par ordenado (a, b), "a" é denominado de **primeira componente** e "b" é chamada de **segunda componente**. Em geral $(a, b) \neq (b, a)$.

Assim AxB = { (a, b) | a ∈ A e b ∈ B }.

Note-se que AxB não é igual a BxA, embora a ordem em que os pares são escritos dentro de cada conjunto não seja importante, o que importa é a ordem dentro do par e não entre pares.

Se n(A) = a e n(B) = b então n(AxB) = ab.

1.3. APLICAÇÕES DOS DIAGRAMAS DE VENN

Os diagramas de Venn podem ser usados para ilustrar propriedades das operações entre conjuntos. Por exemplo, verificar que a operação entre conjuntos A - B é igual a A∩B'

Outras propriedades que podem ser verificadas através dos diagramas são:

As leis de De Morgan (em homenagem ao lógico Britânico **Augustus de Morgan** (1805-1871)):

(A∩B)' = A'UB'

(AUB)' = A'∩B'

Propriedade comutativa:

AUB = BUA

A∩B = B∩A

Propriedade associativa:

(AUB)UC = AU(BUC)

(A∩B)∩C = A∩(B∩C)

Propriedade distributiva:

A∩(BUC) = (A∩B)U(A∩C)

AU(B∩C) = (AUB) ∩(AUC)

Propriedades da identidade:

AU∅ = A

A∩U = A

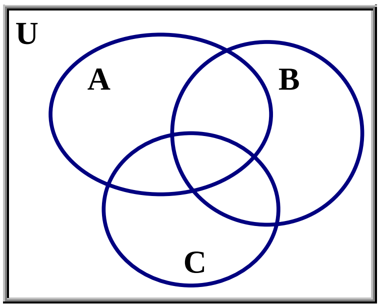


Figura 1.1- Exemplo de um diagrama de Venn

1.4. FATORIAL

Um professor comprou 5 novos livros e quer colocá-los lado a lado em uma estante. Quantos maneiras diferentes existem de colocar os 5 livros?

Para o primeiro espaço, existem 5 escolhas possíveis, uma para cada livro. Uma vez colocado o primeiro livro, restam 4 escolhas para o segundo espaço e assim por diante. Então o número de escolhas diferentes é: 5.4.3.2.1 = 120. Este tipo especial de multiplicação tem um símbolo próprio: 5!. De um modo geral se dispomos de um número n, então o produto acima é representado por n! e é lido "ene fatorial", isto é:

n! = n(n - 1)(n - 2) ... 3.2.1 e têm-se também que 0! = 1

A relação n! = n(n -1)! poderá ser útil em algumas situações.

1.5. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO)

Suponha que se possa fazer "n" escolhas independentes com:

• $\mathbf{m_1}$ maneiras de fazer a escolha **1**,

• $\mathbf{m_2}$ maneiras de fazer a escolha **2**,

• ....,

• $\mathbf{m_n}$ maneiras de fazer a escolha **n**.

Então existem $\mathbf{m_1.m_2. ... .m_n}$ maneiras diferentes de fazer a seqüência inteira de escolhas.

Exemplo 1.1

Um antigo trabalho da filosofia chinesa conhecido como *I Ching* (Livro das Mutações) é às vezes usada como um oráculo do qual as pessoas podem procurar e obter conselhos. A filosofia descreve a dualidade do universo em termos de duas forças primárias: *yin* (passiva, escura, receptiva) e *yang* (ativa, brilhante, criativa). A energia *yin* é representada por uma linha pontilhada (---) e a *yang* por uma linha sólida (—). Estas linhas são escritas uma sobre as outras em grupos de três, denominadas de *triagramas*. Por exemplo, o triagrama é chamado de *Tui*, o "Joyous", e é a imagem de um lago.

(a) Quantos triagramas diferentes existem?

(b) Os triagramas são agrupados juntos, um sobre o outro, em pares conhecidos como, *hexagramas*. Cada hexagrama representa um aspecto da filosofia *I Ching*. Quantos hexagramas existem?

Solução:

(a) A escolha reside entre duas linhas para cada uma das 3 posições do triagrama. Existem duas escolhas para cada posição e como são 3 posições, existem então: 2.2.2 = 8 triagramas diferentes.

(b) Para cada posição no hexagrama, existem 8 possíveis triagramas, dando então: 8.8 = 64 hexagramas.

1.6. PERMUTAÇÕES (ARRANJOS)

Uma permutação consiste do número de possíveis maneiras de arranjar, ou ordenar, certos conjuntos de objetos. Embora o princípio fundamental da contagem pode ser aplicado a questões de arranjar, é possível desenvolver uma abordagem mais eficiente.

O número de permutações de "n" objetos distintos tomados em grupos de "r", onde "r" é menor que "n" é representado por P(n, r). Aplicando o princípio fundamental da contagem a agrupamentos deste tipo, tem-se:

$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2) ... [n - (r - 1)]$.

Simplificando o último fator acima vem:

O número de permutações , ou arranjos, de "n" objetos distintos, tomados "r" a cada vez, onde r ≤ n, é dado por:

$\mathbf{P(n, r) = n(n - 1)(n - 2) ... (n - r + 1)}$.

Exemplo 1.2

Calcular cada permutação:

$P(4, 2) = 4.3 = 12$

$P(7, 3) = 7.6.5 = 210$

$P(5, 5) = 5.4.3.2.1 = 120 = 5!$

O número de permutações pode ser expresso em função do fatorial da seguinte forma:

$\mathbf{P(n, r) = n! / (n - r)!}$

1.6.1. PERMUTAÇÕES (ARRANJOS) COM ITENS DUPLICADOS

Permutações também podem ser realizadas com itens duplicados. Por exemplo, de quantas maneiras diferentes pode-se arranjar a palavra zoo? (A idéia aqui é que o conjunto, das letras, da palavra *zoo*, contém dois elementos "o" indistingüíveis, não que um único "o" é repetido. Desta forma, se está lidando com itens duplicados e não com repetições. Uma vez que, dois "o" podem ser arranjados em 2! diferentes maneiras, o número de arranjos diferentes (ou distinguíveis) é:

3! / 2! = 3 (zoo, ozo, ooz)

Desta forma, pode-se definir:

Se uma coleção de "n" objetos contém n_1 que são idênticos, outros, n_2 que são idênticos entre si, mas diferentes dos primeiros n_1 e assim sucessivamente , até n_k, então o número de arranjos distinguíveis de todos os "n" objetos é dado por:

$n! / (n_1!n_2!...n_k!)$

Exemplo 1.3

Quantos arranjos distintos podem ser feitos com as letras da palavra "estatística"?

Solução:

Neste caso tem-se um total de 11 letras, das quais $n_1 = 2$ (o "s" ocorre duas vezes), $n_2 = 3$ (o "t" ocorre 3 vezes), $n_3 = 2$ (o "a" ocorre duas vezes) e $n_4 = 2$ (a letra "i" ocorre duas vezes). Então, existem:

11! / 2! 3! 2! 2! = 831 600 arranjos distintos de letras da palavra "estatística".

1.6.2. PERMUTAÇÕES (ARRANJOS) COM REPETIÇÃO

Considere-se "n" elementos tomados "r" a "r", onde são permitidas as repetições, isto é, o mesmo elemento pode ocorrer mais de uma vez. Então o número de permutações (arranjos), não necessariamente distintos, é dado por: n^r, isto é:

$P(n, r) = n^r$

Exemplo 1.4

Uma urna contém bolas vermelhas, brancas e pretas. Uma bola é extraída e após anotada a sua cor volta para a urna. Então uma segunda bola é extraída e anotada igualmente a cor. Quantas são as possíveis seqüências de cores observadas?

Solução:

Como cada extração fornece uma cor entre { V, B, P } o número de seqüências possíveis é, pelo princípio fundamental da contagem: $3.3 = 3^2 = 9$.

1.7. COMBINAÇÕES.

Existem certos arranjos onde a ordem entre os elementos não é importante, por exemplo, para calcular a probabilidade de acertar a sena, a quina, etc. não é necessário saber a ordem em que os números foram sorteados, mas apenas a combinação de números. Permutações (arranjos) onde a ordem não interessa são denominadas de **combinações**.

O número de combinações de "n" objetos tomados em grupos de "r" é representado por C(n, r) ou por: $\binom{n}{r}$.

O número de combinações, ou subconjuntos, de "n" objetos tomados em grupos de "r", onde r ≤ n é dado por:

C(n, r) = P(n, r) / r! = n! / r!(n - r)!

Exemplo 1.5

Uma forma comum de pôquer consiste em mãos (conjuntos) de cinco cartas cada, retiradas de um baralho padrão de 52 cartas. Quantas mãos diferentes são possíveis?

Solução:

Neste caso a ordem não é importante, pois uma dada mão de cartas depende apenas das cartas que ela contém e não da ordem específica que elas foram dadas. Neste caso, então, aplica-se o conceito de combinação:

Assim C(52, 5) = 52! / 5!.47! = 2 598 960.

1.8. O TEOREMA BINOMIAL.

Avaliar a expressão $(x + y)^n$ para vários valores de "n" fornece uma família de expressões, denominadas de **expansão binomial**, que são importantes na Matemática, principalmente na teoria probabilística. Algumas expansões de $(x + y)^n$ estão listadas abaixo.

$(x + y)^1 = x + y$

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

....

Examinando estas expressões pode-se identificar um padrão, que pode ser escrito como:

$$(x + y)^n = \binom{n}{n} x^n + \binom{n}{n-1} x^{n-1}y + \binom{n}{n-2} x^{n-2}y^2 + ... + \binom{n}{2} x^2y^{n-2} + \binom{n}{1} xy^{n-1} + \binom{n}{0} y^n$$

Um outro método de encontrar os coeficientes dos termos da expansão binomial é dado pelo **triângulo de Pascal (ou Tartaglia**, de acordo com NOG75), onde cada número no triângulo pode ser encontrado somando-se os dois números imediatamente superiores a ele. Veja-se o exemplo, abaixo, mostrando uma parte do triângulo.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
....

Pode-se observar que a soma de cada linha do triângulo acima é 2^n onde n é o número da linha. Assim para a primeira linha tem-se $1 = 2^0$, para a segunda: $1 + 1 = 2^1$, para a terceira $1 + 2 + 1 = 2^2$ e assim por diante.

Este triângulo expresso como coeficientes fica:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

....

Note que a primeira linha do triângulo contém os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^0$. A segunda linha do triângulo contém os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^1$. A terceira linha do triângulo contém os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^2$ e assim por diante.

Pelo triângulo fica fácil verificar a validade da relação de **Stiefel**: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$, para $n \geq 2$.

E também que: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

A propriedade vista de que a soma das linhas é igual a 2^n pode então ser expressa como:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n.$$

2. PROBABILIDADE

2.1. INTRODUÇÃO

A ciência manteve-se até pouco tempo atrás, firmemente apegada à lei da “causa e efeito”. Quando o efeito esperado não se concretizava, atribuía-se o fato ou a uma falha na experiência ou a uma falha na identificação da causa. Não poderia haver quebra da cadeia lógica. Segundo **Laplace** (**Pierre Simon**) uma vez conhecidas a vizinhança, a velocidade e a direção de cada átomo no universo, poder-se-ia, a partir daí, predizer com certeza, o futuro até a eternidade.

Sabe-se hoje, através do princípio da incerteza , que não é bem assim. Que não existem meios que permitam determinar os movimentos dos elétrons individuais se conhecido a sua velocidade, conforme o estabelecido em 1927, pelo físico alemão **W. Heinsenberg**.

2.2. MODELOS

Conforme **J. Neymann**, toda a vez que se emprega Matemática com a finalidade de estudar algum fenômeno deve-se começar por construir um modelo matemático. Este modelo pode ser: **determinístico** ou então **probabilístico**.

2.2.1. MODELO DETERMÍNISTICO

Neste modelo as condições sob as quais o experimento é executado, determinam o resultado do experimento. Tome-se, por exemplo, a lei de **Ohm**, V = I.R. Se R e I forem conhecidos, então V estará precisamente determinado.

2.2.2. MODELO NÃO-DETERMINÍSTICO OU PROBABILÍSTICO

É um modelo em que de antemão não é possível explicitar ou definir um resultado particular. Este modelo é especificado através de uma distribuição de probabilidade. É utilizado quando se tem um grande número de variáveis influenciando o resultado e estas variáveis não podem ser controladas. Tome-se por exemplo, o lançamento de um dado onde se tenta prever o número da face que irá sair, a retirada de uma carta de um baralho, etc.

O modelo estocástico é caracterizado como um modelo probabilístico que depende ou varia com o tempo.

2.3. EXPERIMENTO ALEATÓRIO (NÃO-DETERMINÍSTICO)

Não existe uma definição satisfatória de Experimento Aleatório. Por isto é necessário ilustrar o conceito um grande número de vezes para que a idéia fique bem clara. Convém lembrar que os exemplos dados são de fenômenos para os quais modelos probabilísticos são adequados e que por simplicidade, são denominados de experimentos aleatórios, quando, de fato, o que deveria ser dito é “modelo não-determinístico aplicado a um experimento”.

Ao descrever um experimento aleatório deve-se especificar não somente que operação ou procedimento deva ser realizado, mas também o que é que deverá ser observado. Note-se a diferença entre E_2 e E_3.

E_1: Joga-se um dado e observa-se o número obtido na face superior.

E_2: Joga-se uma moeda 4 vezes e o observa-se o número de caras obtido.

E_3: Joga-se uma moeda 4 vezes e observa-se a seqüência de caras e coroas.

E_4: Um lote de 10 peças contém 3 defeituosas. As peças são retiradas uma a uma (sem reposição) até que a última defeituosa seja encontrada. Conta-se o número de peças retiradas.

E_5: Uma lâmpada nova é ligada e observa-se o tempo gasto até queimar.

E_6: Lança-se uma moeda até que ocorra uma cara e conta-se então o número de lançamentos necessários.

E_7: Lançam-se dois dados e anota-se o total de pontos obtidos.

E_8: Lançam-se dois dados e anota-se o par obtido.

Características dos Experimentos Aleatórios

Observando-se os exemplos acima pode-se destacar algumas características comuns:

1. Podem ser repetidos indefinidamente sob as mesmas condições.

2. Não se pode adiantar um resultado particular, mas pode-se descrever todos os resultados possíveis

3. Se repetidos muitas vezes apresentarão uma regularidade em termos de freqüência de resultados.

2.4. O ESPAÇO AMOSTRAL

2.4.1. DEFINIÇÃO

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Anota-se por S, E ou Ω.

Exemplo 2.1

Determinar o espaço amostra dos experimentos anteriores. S_i refere-se ao experimento E_i.

S_1 = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

S_2 = { 0, 1, 2, 3, 4 }

S_3 = { cccc, ccck, cckc, ckcc, kccc, cckk, kkcc, ckck, kckc, kcck, ckkc, ckkk, kckk, kkck, kkkc, kkkk }

S_4 = { 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 , 10 }

$S_5 = \{ t \in \Re \,/\, t \geq 0 \}$

S_6 = { 1, 2, 3, 4, 5, ... }

S_7 = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 }

S_8 = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) }

Ao descrever um espaço amostra de um experimento, deve-se ficar atento para o que se está observando ou mensurando. Deve-se falar em "um" espaço amostral associado a um experimento e não de "o" espaço amostral. Deve-se observar ainda que nem sempre os elementos de um espaço amostral são números.

2.4.2. CLASSIFICAÇÃO DE UM ESPAÇO AMOSTRA

Um espaço amostral, conforme exemplos anteriores pode ser classificado em:

(a) Finito. São os espaços: S_1, S_2, S_3, S_4, S_7 e S_8

(b) Infinitos. **(i)** Enumeráveis (ou contáveis): S_6

(ii) Não-enumeráveis (ou não contáveis): S_5

2.5. EVENTOS

DEFINIÇÃO:

Qualquer subconjunto se um espaço amostra S é denominado evento.

Assim tem-se que:

S é o evento certo;

{ a } é o evento elementar e

∅ é o evento impossível.

Convém observar que tecnicamente todo subconjunto de um espaço amostra é um evento apenas quando ele for finito ou, então, infinito enumerável. Se o espaço amostra é infinito não-enumerável é possível construir subconjuntos que não são eventos. Se S é finito, isto é, #(S) = n então o número de eventos possíveis é $\#P(A) = 2^n$.

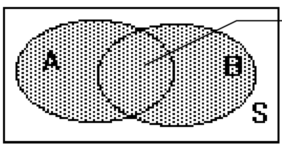
2.5.1. COMBINAÇÃO DE EVENTOS

Pode-se realizar operações entre eventos da mesma forma que elas são realizadas entre conjuntos. Antes de definir as operações é conveniente conceituar o que se entende por ocorrência de um evento.

Seja E um experimento com um espaço amostra associado S. Seja A um evento de S. É dito que o evento A ocorre se realizada a experiência, isto é, se executado E, o resultado for um elemento de A.

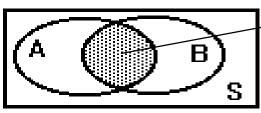
Sejam A e B dois eventos de um mesmo espaço amostra S. Diz-se que ocorre o evento:

1. A união B ou A soma B, anotado por A∪B, se e somente se A ocorre **ou** B ocorre.



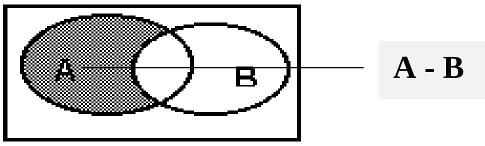
A∪B

2. A produto B ou A interseção B, anotado por A∩B ou AB, se e somente A ocorre **e** B ocorre.

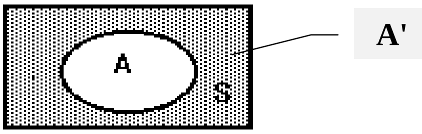


A∩B

3. A menos B ou A diferença B, anota-se A - B, se e somente se A ocorre **e** B **não** ocorre.

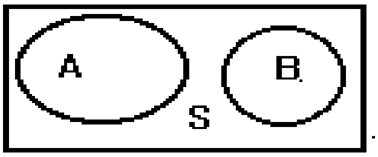


4. O complementar de A, anotado por $\overline{A}$, A^C ou ainda A' se e somente se A **não** ocorre.



2.5.2. EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUDENTES

Dois eventos A e B, são denominados mutuamente exclusivos ou excludentes, se eles não puderem ocorrer juntos, isto é, se $A \cap B = \varnothing$.



2.6. CONCEITOS DE PROBABILIDADE

Existem três formas de se definir probabilidade. A definição clássica, a definição freqüencial e a definição axiomática.

2.6.1. DEFINIÇÃO CLÁSSICA DE PROBABILIDADE

Seja E um experimento aleatório e S um espaço amostra associado formado por "n" resultados igualmente prováveis. Seja $A \subseteq S$ um evento com "m" elementos. A probabilidade de A, anotada por P(A), lê-se pe de A, é definida como sendo:

$P(A) = m / n$

Isto é, a probabilidade do evento A é o quociente entre o número "m" de casos favoráveis e o número "n" de casos possíveis.

Exemplo 2.2

Calcular a probabilidade de no lançamento de um dado equilibrado obter-se:

(a) Um resultado igual a 4.

(b) Um resultado ímpar.

Solução:

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } n = #(S) = 6

(a) A = { 4 } m = #(A) = 1 então P(A) = m / n = 1 / 6 = 16,67%

(b) B = { 1, 3, 5 } m = #(B) = 3 então P(B) = m / n = 3 / 6 = 50%

Crítica à definição clássica

(i) A definição clássica é dúbia, já que a idéia de "igualmente provável" é a mesma de "com probabilidade igual", isto é, a definição é circular, porque está definindo essencialmente a probabilidade com seus próprios termos.

(ii) A definição não pode ser aplicada quando o espaço amostral é infinito.

2.6.2. A DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE COMO FREQÜÊNCIA RELATIVA

Na prática acontece que nem sempre é possível determinar a probabilidade de um evento. Neste caso é necessário ter um método de aproximação desta probabilidade. Um dos métodos utilizados é a experimentação que objetiva estimar o valor da probabilidade de um evento A com base em valores reais. A probabilidade avaliada através deste processo é denominada de probabilidade empírica.

Freqüência relativa de um evento

Seja E um experimento e A um evento de um espaço amostra associado ao experimento E. Suponha-se que E seja repetido "n" vezes e seja "m" o número de vezes que A ocorre nas "n" repetições de E. Então a freqüência relativa do evento A, anotada por fr_A, é o quociente:

$fr_A = m / n$ = (número de vezes que A ocorre) / (número de vezes que E é repetido)

Exemplo 2.3

(i) Uma moeda foi lançada 200 vezes e forneceu 102 caras. Então a freqüência relativa de "caras" é:

$fr_A = 102 / 200 = 0,51 = 51\%$

(ii) Um dado foi lançado 100 vezes e a face 6 apareceu 18 vezes. Então a freqüência relativa do evento A = { face 6 } é:

$fr_A = 18 / 100 = 0,18 = 18\%$

Propriedades da freqüência relativa

Seja E um experimento e A e B dois eventos de um espaço amostra associado S. Sejam fr_A e fr_B as freqüências relativas de A e B respectivamente. Então.

(i) $0 \le fr_A \le 1$, isto é, a freqüência relativa do evento A é um número que varia entre 0 e 1.

(ii) $fr_A = 1$ se e somente se, A ocorre em todas as "n" repetições de E.

(iii) $fr_A = 0$, se e somente se, A nunca ocorre nas "n" repetições de E.

(iv) $fr_{AUB} = fr_A + fr_B$ se A e B forem eventos mutuamente excludentes.

Definição

Seja E um experimento e A um evento de um espaço amostra associado S. Suponhamos que E é repetido "n" vezes e seja fr_A a freqüência relativa do evento. Então a probabilidade de A é definida como sendo o limite de fr_A quando "n" tende ao infinito. Ou seja:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} fr_A$$

Deve-se notar que a freqüência relativa do evento A é uma aproximação da probabilidade de A. As duas se igualam apenas no limite. Em geral, para um valor de n, razoavelmente grande a fr_A é uma boa aproximação de P(A).

Crítica à definição freqüencial

Esta definição, embora útil na prática, apresenta dificuldades matemáticas, pois o limite pode não existir. Em virtude dos problemas apresentados pela definição clássica e pela definição freqüencial, foi desenvolvida uma teoria moderna, na qual a probabilidade é um conceito indefinido, como o ponto e a reta o são na geometria.

2.6.3. DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA DE PROBABILIDADE

Seja E um experimento aleatório com um espaço amostra associado S. A cada evento $A \subseteq S$ associa-se um número real, representado por P(A) e denominado "probabilidade de A", que satisfaz as seguintes propriedades (axiomas):

(i) $0 \le P(A) \le 1$;

(ii) $P(S) = 1$;

(iii) $P(AUB) = P(A) + P(B)$ se A e B forem eventos mutuamente excludentes.

(iv) Se A_1, A_2, ..., A_n, ..., forem, dois a dois, eventos mutuamente excludentes, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Conseqüências dos axiomas (propriedades)

(i) $P(\varnothing) = 0$

Prova

Seja $A \subseteq S$ então tem-se que $A \cap \varnothing = \varnothing$, isto é, A e $\varnothing$ são mutuamente excludentes. Então:

$P(A) = P(A \cup \varnothing) = P(A) + P(\varnothing)$, pela propriedade 3. Cancelando P(A) em ambos os lados da igualdade segue que $P(\varnothing) = 0$.

(ii) Se A e $\bar{A}$ são eventos complementares então:

$P(A) + P(\bar{A}) = 1$ ou $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Prova

Tem-se que $A \cap \bar{A} = \varnothing$ e $A \cup \bar{A} = S$. Então:

$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$, pela propriedade 3.

(iii) Se $A \subseteq B$ então $P(A) \le P(B)$

Prova

Tem-se: $B = A \cup (B - A)$ e $A \cap (B - A) = \varnothing$

Assim $P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A)$ e como $P(B - A) \ge 0$ segue que:

$P(B) \ge P(A)$

(iv) Se A e B são dois eventos quaisquer então:

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Prova

$A = (A - B) \cup (A \cap B)$ e $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$

Logo $P(A) = P((A - B) \cup (A \cap B)) = P(A - B) + P(A \cap B)$. Do que segue:

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

(v) Se A e B são dois eventos quaisquer de S, então:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Prova

$A \cup B = (A - B) \cup B$ e $(A - B) \cap B = \varnothing$ Tem-se então:

$P(A \cup B) = P((A - B) \cup B) = P(A - B) + P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, pela propriedade (iv).

(vi) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Prova

Faz-se $B \cup C = D$ e aplica-se a propriedade (v) duas vezes.

(vii) Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são eventos de um espaço amostra S, então: $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) =$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i<j=2}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<r=3}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + ... + (-1)^{k+1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$$

2.7. PROBABILIDADE CONDICIONADA E INDEPENDÊNCIA

Suponha-se que se quer extrair duas peças ao acaso de um lote que contém 100 peças das quais 80 peças são boas e 20 defeituosas, de acordo com os critérios (a) com reposição e (b) sem reposição. Define-se os seguintes eventos:

A = { A primeira peça é defeituosa }   e   B = { A segunda peça é defeituosa }.

Então, se a extração for **com** reposição P(A) = P(B) = 20 / 100 = 1 / 5 = 20%, porque existem 20 peças defeituosas num total de 100.

Agora se a extração for **sem** reposição tem-se ainda que P(A) = 20 / 100 = 20%, mas o mesmo não é verdadeiro para P(B). Neste caso, é necessário conhecer a composição do lote no momento da extração da segunda peça, isto é, é preciso saber se a primeira peça retirada foi ou não defeituosa. Neste caso é necessário saber se A ocorreu ou não. O que mostra a necessidade do conceito de probabilidade condicionada.

2.7.1. DEFINIÇÃO

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostra S, associado a um experimento E, onde P(A) > 0. A probabilidade de B ocorrer condicionada a A ter ocorrido, será representada por P(B/A), e lida como: “probabilidade de B dado A” ou “probabilidade de B condicionada a A”, e calculada por:

$P(B/A) = P(A \cap B) / P(A)$

No exemplo acima, então P(B/A) = 19 / 99, pois se A ocorreu (isto é, se saiu peça defeituosa na primeira retirada) existirão na urna apenas 99 peças das quais 19 defeituosas.

Sempre que se calcular P(B/A) está se calculando a probabilidade de ocorrência do evento B em relação ao *espaço amostra reduzido A*, ao invés de fazê-lo em relação ao espaço amostral original S.

Quando se calcula P(B) está se calculando a probabilidade de estar em B, sabendo-se que se está em S, mas quando se calcula P(B/A) está calculando a probabilidade de B, sabendo-se que se está em A agora e não mais em S, isto é, o espaço amostra fica reduzido de S para A.

É simples verificar as seguintes propriedades de P(B/A) para A fixado:

(i) $0 \le P(B/A) \le 1$,

(ii) $P(S/A) = 1$,

(iii) $P(B_1 \cup B_2/A) = P(B_1 / A) + P(B_2 / A)$ se $B_1 \cap B_2 = \varnothing$

(iv) $P(B_1 \cup B_2 \cdots /A) = P(B_1/A) + P(B_2/A) + ...$ se $B_i \cap B_j = \varnothing$ para $i \neq j$.

Observe-se que estas propriedades são idênticas aos axiomas de probabilidade.

Pode-se também comparar P(A/B) e P(A). Para tanto considere-se os quatro casos ilustrados nos diagramas abaixo:

Tem-se:

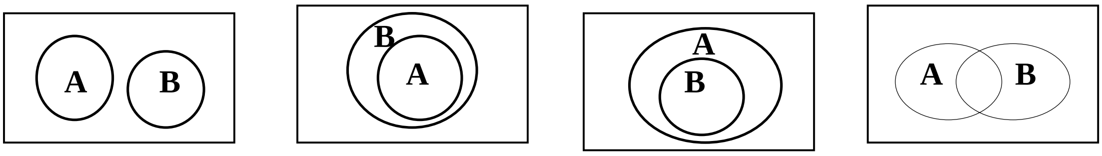
(a) P(A/B) = 0, porque A não poderá ocorrer se B tiver ocorrido.

(b) $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = [P(A) / P(B)] \geq P(A)$, já que $P(A) \leq P(B)$, pois $A \subseteq B$.

(c) $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = [P(B) / P(B)] = 1 \geq P(A)$.

(d) Neste caso nada se pode afirmar sobre o relacionamento entre P(A/B) e P(A).

a) $A \cap B = \varnothing$ **(b)** $A \subset B$ **(c)** $B \subset A$ **(d)** Caso geral



2.7.2. TEOREMA DA MULTIPLICAÇÃO

Com o conceito de probabilidade condicionada é possível apresentar uma maneira de se calcular a probabilidade da interseção de dois eventos A e B em função destes eventos. Esta expressão é denominada de teorema da multiplicação. $P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = P(A/B).P(B)$

2.7.3. INDEPENDÊNCIA DE DOIS EVENTOS

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostra S. A e B são ditos **independentes** se a probabilidade de um deles ocorrer não afetar a probabilidade do outro ocorrer, isto é, se:

P(A/B) = P(A) ou

P(B/A) = P(B) ou ainda se

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Qualquer uma das 3 relações acima pode ser usada como definição de independência.

Exemplo 2.4

[MEY78] Três componentes C_1, C_2, e C_3, de um mecanismo são postos em série (em linha reta). Suponha que esses componentes sejam dispostos em ordem aleatória. Seja R o evento { C_2 está à direita de C_1 }, e seja S o evento { C_3 está à direita de C_1 }. Os eventos R e S são independentes? Por quê?

Solução:

Para que R e S sejam independentes deve-se ter:

$P(R \cap S) = P(R).P(S)$.

O espaço amostra para este caso é:

$S = \{ C_1C_2C_3, C_1C_3C_2, C_2C_1C_3, C_2C_3C_1, C_3C_1C_2, C_3C_2C_1 \}$

As seqüências em que C_2 está à direita de C_1 são:

$R = \{ C_1C_2C_3, C_1C_3C_2, C_3C_1C_2 \}$. Logo: P(R) = 3/6 = 50%

As seqüências em que C_3 está à direita de C_1 são:

S = { $C_1C_2C_3$, $C_1C_3C_2$, $C_2C_1C_3$ }. Logo

P(S) = 3/6 = 50%

As seqüências em que C_2 está à direita de C_1 e C_3 está também à direita de C_1 são:

$R \cap S$ = { $C_1C_2C_3$, $C_1C_3C_2$ }. Logo

$P(R \cap S) = 2/6 = 1/3 = 33{,}33\% \neq P(R).P(S) = 0.5.0{,}5 = 0{,}25 = 25\%$

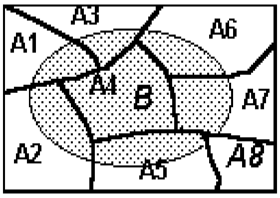
Portanto os eventos R e S não são independentes.

2.7.4. TEOREMAS DA PROBABILIDADE TOTAL E DE BAYES

O conceito de probabilidade condicionada pode ser utilizado para calcular a probabilidade de um evento simples A ao invés da probabilidade da interseção de dois eventos A e B. Para tanto é necessário o conceito de partição de um espaço amostra.

Definição

Diz-se que os conjuntos A_1, A_2, ..., A_n eventos de um mesmo espaço amostra S, formam uma partição deste espaço se:



(a) $A_i \cap A_j = \varnothing$, para todo $i \neq j$.

(b) $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n = S$

(c) $P(A_i) > 0$, para todo i

Exemplo 2.5

Considere-se o espaço amostra obtido pelos números das faces no lançamento de um dado equilibrado e sejam os eventos:

A_1 = { 1, 2, 3 }, A_2 = { 4, 5 } e A_3 = { 6 }

Então, pode-se verificar facilmente que, os eventos acima formam um partição do espaço amostra S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }.

Teorema da probabilidade total

Considere-se um espaço amostra S e A_1, A_2, ..., A_n uma partição deste espaço amostra. Seja B um evento de S. Então B, pode ser escrito como (A figura acima ilustra a partição com n = 8):

$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$

É claro que, alguns destes conjuntos $B \cap A_j$, poderão ser vazios, mas isto não representa nenhum problema na decomposição de B. O importante é que todos os conjuntos $B \cap A_1$, $B \cap A_2$, ..., $B \cap A_n$ são dois a dois mutuamente excludentes. E por isto, pode-se aplicar a propriedade da adição de eventos mutuamente excludentes e escrever.

$P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)] = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$

Mas cada um dos termos $P(B \cap A_j)$ pode ser escrito na forma:

$P(B \cap A_j) = P(A_j).P(B/A_j)$, pela definição de probabilidade condicionada, obtém-se então o denominado teorema da probabilidade total:

$$\mathbf{P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \ldots + P(A_n).P(B/A_n)}$$

Exemplo 2.6

Uma determinada peça é manufaturada por 3 fábricas: A, B e C. Sabe-se que A produz o dobro de peças que B e que B e C produzem o mesmo número de peças. Sabe-se ainda que 2% das peças produzidas por A e por B são defeituosas, enquanto que 4% das produzidas por C são defeituosas. Todas as peças produzidas são misturadas e colocadas em um depósito. Se do depósito for retirada uma peça ao acaso, qual a probabilidade de que ela seja defeituosa?

Solução:

Considerem-se os seguintes eventos:

D = { A peça é defeituosa }, A = { A peça provém da fábrica A }, B = { A peça provém da máquina B } e C = { A peça provém da máquina C }.

Tem-se então que: P(A) = 50%, P(B) = P(C) = 25%, uma vez que só existem as 3 fábricas e que A produz o dobro de B e esta por sua vez produz a mesma quantidade que C. Sabe-se também que P(D/A) = P(D/B) = 2% e que P(D/C) = 4%.

Pela teorema da probabilidade total pode-se escrever que:

P(D) = P(A).P(D/A) + P(B).P(D/B) + P(C).P(D/C) = 0,5.0,02 + 0,25.0,02 + 0,25.0,04 = 2,50%, pois A, B e C formam uma partição do espaço amostra S.

Teorema de Bayes

Suponha-se que no exemplo acima, uma peça é retirada do depósito e se verifica que é defeituosa. Qual a probabilidade de que tenha sido produzida pela fábrica A? ou B? ou ainda C?

Neste caso, o que se quer calcular é a probabilidade condicionada P(A/D).

Pela notação já vista acima, e generalizando a questão o que se está interessado em obter é a probabilidade de ocorrência de um dos A_i dado que B ocorreu, isto é, o que se quer é saber o valor de $P(A_i / B)$, onde os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ formam uma partição de S e B é um evento qualquer de S.

Aplicando a definição de probabilidade condicionada segue que:

$P(A_i / B) = P(A_i \cap B) / P(B) = P(A_i).P(B / A_i) / P(B)$, onde P(B) é avaliado pelo teorema da probabilidade total. Este resultado é conhecido como **teorema de Bayes**. Assim:

$$\mathbf{P(A_i / B) = P(A_i).P(B / A_i) / [P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + ... + P(A_n).P(B/A_n)]}$$

Exemplo 2.7

Considerando a pergunta acima vem então:

P(A / D), isto é a probabilidade de ter sido produzida pela máquina A dado que a peça é defeituosa é:

P(A / D) = P(A). P(D / A) / P(D) = 0,02.0,50 / (0,5.0,02 + 0,25.0,02 + 0,25.0,04) = 0,40 = 40%

3. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

3.1. INTRODUÇÃO

Ao se descrever o espaço amostra de um experimento nota-se que os elementos não são necessariamente números. Assim, por exemplo, no lançamento de duas moedas pode-se ter o seguinte espaço amostra:

S = { cc, ck, kc, kk }

Contudo, na maior parte das vezes, se está interessado num resultado numérico, isto é, deseja-se associar aos elementos do espaço amostra S um número real x = X(s). Desta forma formula-se a definição:

Seja E um experimento com um espaço amostra associado S. Uma função X que associe a cada elemento de S ($s \in S$) um número real x = X(s) é denominada **variável aleatória**.

O conjunto formado por todos os valores "x", isto é, a imagem da variável aleatória X, é denominado de **conjunto de valores de X** e anotado por X(S). Desta forma:

$X(S) = \{ x \in \Re \ / \ X(s) = x \}$

Exemplo 3.1

Seja S o espaço amostra formado pelas seqüências obtidas no lançamento de 3 moedas equilibradas. Seja X a variável aleatória definida como sendo o número de caras da seqüência, isto é, X(s) = x = números de caras. O conjunto de valores da variável X é X(S) = { 0, 1, 2, 3 }, pois, neste caso, tem-se:

X(ccc) = 0

X(ckk) = 1, etc.

Ou então:

s	kkk	ckk, kck, kkc	cck, ckc, kcc	ccc
X(s)	0	1	2	3

Conforme o conjunto de valores uma variável aleatória poderá ser discreta ou contínua.

Se o conjunto de valores for **finito** ou então **infinito enumerável** a variável é dita discreta.

Se o conjunto de valores for **infinito não enumerável** então a variável é dita contínua.

3.2. VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

Uma variável aleatória X é dita discreta se o seu conjunto de valores X(S) é finito ou então infinito contável ou enumerável.

3.2.1. A FUNÇÃO DE PROBABILIDADE

Seja X uma variável aleatória discreta (VAD), isto é, com X(S) finito ou infinito enumerável, definida num espaço amostral S. A cada resultado x_i de X(S) associa-se um número $f(x_i) = P(X = x_i)$ denominado probabilidade de x_i e tal que satisfaz as seguintes propriedades:

$f(x_i) \geq 0$, para todo "i".

$\sum f(x_i) = 1$

A função "f" assim definida é denominada de **função de probabilidade** de X

A coleção dos pares (x_i, $f(x_i)$) para i = 1, 2, 3, ... é denominada de **distribuição de probabilidade** da VAD X.

Note-se que f(x) = P(X = x) = P({ s ∈ S / X(s) = x }) Desta forma quando se calcula f(x) está se calculando, na realidade, a probabilidade do evento { s ∈ S / X(s) = x } ⊆ S.

Exemplo 3.2

Dois dados são lançados e observa-se o par obtido. O espaço amostra é formado por 36 resultados eqüiprováveis. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias definidas da seguinte forma:

X = soma do par obtido

Y = maior valor do par

Tem-se então:

X(S) = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 }

Y(S) = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

Para X tem-se:

f(2) = P(X = 2) = P({ (1, 1) }) = 1/36

f(3) = P(X = 3) = P({ (2, 1), (1, 2) }) = 2/36

f(4) = P(X = 4) = P({ (1, 3), (2, 2), (3, 1) }) = 3/36

f(5) = P(X = 5) = P({ (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) }) = 4/36

f(6) = P(X = 6) = P({ (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) }) = 5/36

f(7) = P(X = 7) = P({ (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) }) = 6/36

f(8) = P(X = 8) = P({ (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) }) = 5/36

f(9) = P(X = 9) = P({ (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3) }) = 4/36

f(10) = P(X = 10) = P({ (4, 6), (5, 5), (6, 4) }) = 3/36

f(11) = P(X = 11) = P({ (5, 6), (6, 5) }) = 2/36

f(12) = P(X = 12) = P({ (6, 6)}) = 1/36

Em resumo:

x	2	3	4	5	6	7	8	8	10	11	12
f(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Para Y tem-se:

f(1) = P(Y = 1) = P({ (1, 1) }) = 1/36

f(2) = P(Y = 2) = P({ (2, 1), (2, 2), (1, 2) }) = 3/36

f(3) = P(Y = 3) = P({ (1, 3), (2, 3), (3, 3), (3,2), (3, 1) }) = 5/36

f(4) = P(Y = 4) = P({ (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (4, 1) }) = 7/36

f(5) = P(Y = 5) = P({ (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (5, 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1) }) = 9/36

f(6) = P(Y = 6) = P({ (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1 }) = 11/36

Em resumo:

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

3.2.2. REPRESENTAÇÃO DA FUNÇÃO DE PROBABILIDADE

Existem três maneiras de representar a função de probabilidade de uma VAD X:

(i) Através de uma tabela.

(ii) Através de uma expressão analítica para f(x) (fórmula).

(iii) Através de um diagrama, onde os valores da variável são registrados no eixo das abcissas e as probabilidades no eixo das ordenadas.

Exemplo 3.3

(i) As duas tabelas acima.

(ii) Considere-se a variável Y, do exemplo acima, onde Y(S) = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Então:

$$f: Y(S) \rightarrow \Re$$
$$y \rightarrow (2y - 1)/36$$

Deste modo: f(1) = (2.1 - 1) / 36 = 1 / 36

f(6) = (6.2 - 1) / 36 = 11/ 36

(iii) Veja o diagrama abaixo.

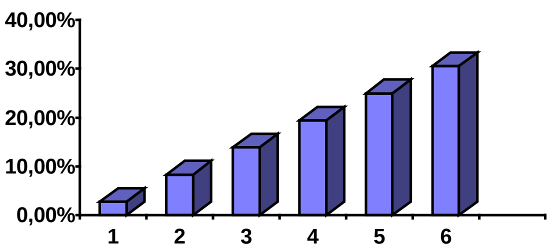


Figura 3.1 - Diagrama de barras da distribuição de Y

3.2.3. A FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

Seja X uma VAD com função densidade f(x). Então a **função de distribuição acumulada** - FDA, ou simplesmente **função de distribuição** de X é a função F "em escada" definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Exemplo 3.4

Seja X uma VAD com a distribuição da tabela abaixo:

x	-2	1	2	4
f(x)	1/4	1/8	1/2	1/8

Então a função de distribuição de X é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -2 \\ 1/4 & \text{se } -2 \leq x\ 1 \\ 3/8 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 7/8 & \text{se } 2 \leq x < 4 \\ 1 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

3.2.4. VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA (CARACTERIZAÇÃO)

Considere X uma variável aleatória discreta assumindo os valores: x_1, x_2, ..., x_i, ..., com probabilidades $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... , $f(x_i)$, ...

Expectância, esperança, média ou valor esperado de X

A média, expectância, **valor esperado** ou esperança matemática da variável aleatória X é representada por μ ou E(X) e calculada por:

$$\mu = E(X) = x_1f(x_1) + x_2f(x_2) + ... + x_nf(x_n) + ... = \sum x_i.f(x_i)$$

Exemplo 3.5

Calcular o número esperado de faces caras no lançamento de duas moedas equilibradas.

Solução:

Seja X = Número de caras. Então a distribuição de X é dada por:

x	0	1	2
f(x)	1/4	2/4	1/4

Logo a média ou expectância de X será:

E(X) = 0.(1/4) + 1.(2/4) + 2.(1/4) = 1/2 + 1/2 = 1 cara.

A variância de X

Seja X uma variável aleatória discreta com média μ = E(X). Então a variância de X, anotada por σ^2 ou V(X) é definida por:

$$\sigma^2 = V(X) = f(x_1)\,(x_1 - \mu)^2 + f(x_2)\,(x_2 - \mu)^2 + ... + f(x_n)\,(x_n - \mu)^2 + ... = \sum f(x_i)(x_i - \mu)^2$$

Pode-se demonstrar que a expressão da variância, acima, pode ser transformada na seguinte expressão:

$$\sigma^2 = V(X) = \sum f(x_i)(x_i - \mu)^2 = \sum f(x_i)\,x_i^2 - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Exemplo 3.6

Calcular a variância da distribuição do exemplo anterior.

Solução:

Tem-se que:

E(X) = 1, então:

$$\sigma^2 = V(X) = \sum f(x_i)(x_i - \mu)^2 = (1/4)(0 - 1)^2 + (2/4)(1 - 1)^2 + (1/4)(2 - 1)^2 = 1/2$$

Ou ainda:

$$E(X^2) = (1/4).0^2 + (2/4).1^2 + (1/4).2^2 = 3/2$$

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - \mu^2 = 3/2 - 1^2 = 1/2$$

O desvio padrão

O desvio padrão da variável X, anotado por σ, é a raiz quadrada da variância.

A variância relativa e o coeficiente de variação

Seja X uma variável aleatória discreta com média $\mu = E(X)$ e variância $\sigma^2 = V(X)$. Então a variância relativa de X, anotada por: γ^2, e definida por:

$\gamma^2 = \sigma^2 / \mu^2$

O coeficiente de variação de X é definido como a raiz quadrada da variância relativa:

$\gamma = \sigma / \mu$

Exemplo 3.7

Um vendedor recebe uma comissão de R$ 50,00 por uma venda. Baseado em suas experiências anteriores ele calculou a distribuição de probabilidades das vendas semanais:

x	0	1	2	3	4
f(x)	0,10	0,20	0,40	0,20	0,10

(a) Qual é o valor esperado de vendas por semana?

(b) Qual é a probabilidade de ganhar pelo menos R$ 150,00 por semana?

(c) Qual o desvio padrão das vendas semanais?

(d) Qual o coeficiente de variação das vendas semanais?

Solução:

(a) E(X) = 0.0,10 + 1.0,20 + 2.0,40 + 3.0,20 + 4.0,10 = 2 vendas por semana. Logo, como ele recebe R$ 50,00 por venda a renda esperada semanal é: R$ 100,00.

(b) Para ganhar pelo menos R$ 150,00 por semana ele deve realizar 3 ou 4 vendas por semana. Esta probabilidade é: $P(X \geq 3) = 0,20 + 0,10 = 0,30 = 30\%$

(c) Deve-se inicialmente avaliar o valor da variância e para tanto calcula-se antes a média dos quadrados: $E(X^2) = 0^2.0,10 + 1^2.0,20 + 2^2.0,40 + 3^2.0,20 + 4^2.0,10 = 5,20$.

A variância é então:

$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = 5,20 - 2^2 = 5,20 - 4 = 1,20$

O desvio padrão será:

$\sigma = \sqrt{1,20} = 1,10$

(d) O coeficiente de variação é o quociente entre o desvio padrão e a média, isto é:

$\gamma = \sigma / \mu = 1,10 / 2 = 0,55 = 55\%$

3.3. DISTRIBUIÇÕES ESPECIAIS DE PROBABILIDADE DISCRETAS

Existem algumas distribuições de probabilidade para variáveis discretas que pela sua freqüência de uso vale a pena estudar mais detalhadamente. Estas distribuições apresentam expressões para o cálculo das probabilidades, isto é, as probabilidades f(x) podem ser avaliadas através de um modelo matemático conhecido. Duas destas distribuições são a Binomial e a distribuição de Poisson.

3.3.1. A DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Seja E um experimento aleatório e S um espaço amostra associado. Seja A $\subseteq$ S um evento de S. Seja "n" o número de vezes que o experimento E é repetido e seja "p" a probabilidade de A ocorrer em cada uma das "n" repetições de E, de modo que, "p" permaneça constante durante as "n" repetições de E. Como existem apenas duas situações: A ocorre ou A não ocorre, pode-se determinar a probabilidade de A não ocorrer como sendo q = 1 - p. Em certas situações a probabilidade "p" é denominada de probabilidade de "sucesso" e a probabilidade "q" de probabilidade de fracasso.

Definição:

Seja X uma VAD definida por X = número de vezes que A ocorreu nas "n" repetições de E. A variável aleatória X é denominada de variável aleatória Binomial. O conjunto de valores de X, isto é, X(S) é:

X(S) = { 0, 1, 2, 3, ..., n }

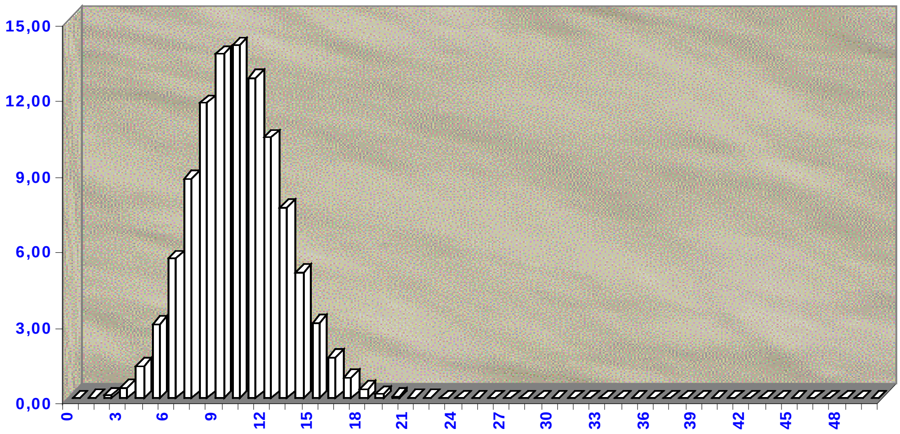


Figura 3.2 – Distribuição B(50; 0,20)

Teorema:

Se X é uma variável aleatória com um comportamento Binomial, então a probabilidade de X assumir um dos valores do conjunto X(S) é calculada por:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x}.p^{x}.q^{n-x}, \text{ para } x = 0, 1, 2, ..., n.$$

Demonstração:

Considere-se um elemento particular do espaço amostra S, satisfazendo à condição X = x. Como todas as repetições são independentes a probabilidade desta seqüência particular é dada por: $p^k(1 - p)^{n - k}$, mas esta mesma probabilidade está associada a qualquer outro resultado em que X = k. O número de resultados em que isto ocorre é dado por $\binom{n}{k}$, porque se deve escolher exatamente "k" casos dentre "n" possibilidades para o evento A. Como estes resultados são todos mutuamente excludentes, então o valor de P(X = k) é o da fórmula acima.

Representação:

Se X tem um comportamento Binomial de parâmetros "n" e "p" então representa-se X por B(n, p).

Exemplo 3.8

Considerando X como sendo a VAD igual a "número de vezes que ocorre face cara em 5 lançamentos de uma moeda equilibrada", determinar a probabilidade de ocorrer:

(a) Duas caras

(b) Quatro caras

(c) No máximo duas caras

Solução:

Neste caso, tem-se:

n = 5 = número de lançamentos.

X = número de caras nos 5 lançamentos $\Rightarrow$ X(S) = { 0, 1, 2, 3, 4, 5 }

p = P(Cara em 1 lançamento) = 0,50, pois a moeda é equilibrada. Logo q = 1 - p = 0,50

Então:

$f(x) = P(X = x) = \binom{5}{x}.0{,}5^{x}.0{,}5^{5-x}$, para x = 0, 1, 2, 3, 4, 5

(a) $P(X = 2) = \binom{5}{2}.0{,}5^{2}.0{,}5^{3} = 10.0{,}25.0{,}125 = 31{,}25\%$

(b) $P(X = 4) = \binom{5}{4}.0{,}5^{4}.0{,}5^{1} = 5.\ 0{,}0625.0{,}5 = 15{,}62\%$

(c) $P(X \le 2) = \binom{5}{0}.0{,}5^{0}.0{,}5^{5} + \binom{5}{1}.0{,}5^{1}.0{,}5^{4} + \binom{5}{2}.0{,}5^{2}.0{,}5^{3} = 0{,}5^{5} + 5.0{,}5^{5} + 10.0{,}5^{5} = 50\%$

3.3.2. PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

A vantagem de se ter um modelo conhecido é que podemos determinar suas características de um modo geral. Assim se X é uma VAD com uma distribuição Binomial tem-se:

Média, expectância ou valor esperado

$\mu = E(X) = \sum x.f(x) = \sum x\binom{n}{x}.p^{x}.q^{n-x} = np$, isto é, a média de uma variável aleatória com distribuição binomial é igual ao produto dos parâmetros "n" e "p".

Variância

$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \sum x^2\binom{n}{x}.p^{x}.q^{n-x} - (np)^2 = npq$, isto é, a variância de uma variável aleatória com distribuição binomial é igual ao produto dos parâmetros "n" e "p" e multiplicados ainda por "q".

O desvio padrão

$\sigma = \sqrt{npq}$

Exemplo 3.9

A probabilidade de um exemplar defeituoso com que opera certo processo produtivo é de 10%. Considerando X a variável "número de unidades defeituosas em uma amostra ocasional de 20 unidades, determinar:

(a) O número médio de item defeituosos na amostra.

(b) O desvio padrão do número de item defeituosos na amostra.

Solução:

(a) E(X) = np = 20.0,10 = 2 itens defeituosos

(b) $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{20.0{,}10.0{,}90} = \sqrt{1{,}80}$ = 1,34 itens defeituosos.

Exemplo 3.10

[NET74] Num determinado processo de fabricação 10% das peças são consideradas defeituosas. As peças são acondicionadas em caixas com 5 unidades cada uma.

(a) Qual a probabilidade de haver exatamente 3 peças defeituosas numa caixa?

(b) Qual a probabilidade de haver duas ou mais peças defeituosas numa caixa?

(c) Se a empresa paga uma multa de R$ 10,00 por caixa em que houver alguma peça defeituosa, qual o valor esperado da multa num total de 1000 caixas?

Solução:

(a) $P(X = 3) = \binom{5}{3}.(0{,}10)^3.(0{,}90)^2$ = 10.0,001.0,81 = 0,81%

(b) P(Duas ou mais defeituosas) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5). Ao invés de calcular desta forma é mais conveniente utilizar o complementar. Assim:

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - (0{,}5905 + 0{,}3280] = 8{,}15\%$

(c) A probabilidade de uma caixa pagar multa é:

$P(PM) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}5905 = 40{,}95\%$

Neste caso tem-se uma nova Binomial com n = 1000 e p = 40,95%. O número esperado de caixas que vão pagar multa, isto é, com uma ou mais peças defeituosas será:

E(PM) = np = 1000.0,4095 = 409,5 caixas.

Como cada uma paga R$ 10,00 de multa, o valor total da multa será:

PM = R$ 10,00.409,5 = R$ 4 095,00

3.3.3. A DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

Considere-se um conjunto de **N** elementos, **r** dos quais tem uma determinada característica ($r \leq N$) e N -r não tenham esta característica. Extraí-se **n** elementos ($n \leq N$) **sem** reposição. Seja X a variável aleatória igual ao número de elementos que possuem a característica entre os **n** retirados. X é denominada de variável aleatória hipergeométrica.

As probabilidades de uma variável aleatória hipergeométrica podem ser avaliadas por:

$$P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{com } x = \max\{0, N - r - n\}, \ldots, \min(r, n).$$

Uma vez que X = x, se e somente se, forem retirados x elementos dentre os r que possuem a característica e forem retirados n - x dentre os n - r que não possuem a característica.

3.3.4. PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

Fazendo p = r/N e q = (N - r) / N, tem-se:

Média, expectância ou valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum \mathbf{x.f(x)} = \sum x.\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = ... = (rn) / N = np.$$

Variância

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \sum \mathbf{x}^2.\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} - (np)^2 = npq\frac{N-n}{N-1}.$$

(c) $P(X = x) \cong \binom{n}{x}.p^x.q^{n-x}$ para N grande.

Note-se que se as extrações fossem feitas **com** reposição, ter-se-ia uma distribuição Binomial. A propriedade (c) afirma que para N suficientemente grande a distribuição hipergeométrica pode ser aproximada pela distribuição Binomial. Em geral, esta aproximação será boa se $(n / N) \leq 0{,}1$.

A distribuição hipergeométrica será representada por H(r; n; N)

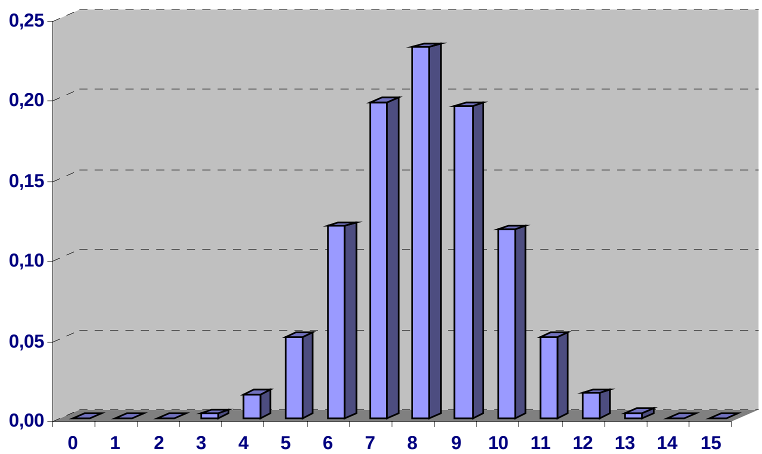


Figura 3.3 – Distribuição hipergeométrica H(20; 20; 50)

Exemplo 3.11

Uma caixa contém 12 lâmpadas das quais 5 estão queimadas. São escolhidas 6 lâmpadas ao acaso. Qual a probabilidade de que:

(a) Exatamente duas estejam queimadas?

(b) Pelo menos uma esteja boa?

(c) Pelo menos duas estejam queimadas?

(d) O número esperado de lâmpadas queimadas?

(e) A variância do número de lâmpadas queimadas?

Solução:

Tem-se N = 12, r = 5 e n = 6, então:

(a) $P(X = 2) = \dfrac{\binom{5}{2}\binom{7}{4}}{\binom{12}{6}} = 37,88\%$

(b) Se são retiradas 6 lâmpadas e somente 5 estão queimadas, então necessariamente uma será boa, portanto:

P(pelo menos uma boa) = 100%.

(c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - \dfrac{\binom{5}{0}\binom{7}{6}}{\binom{12}{6}} - \dfrac{\binom{5}{1}\binom{7}{5}}{\binom{12}{6}} = 87,88\%.$

(d) E(X) = (rn) / N = 5.6 / 12 = 30/12 = 5/2 = 2,50.

(e) $V(X) = \dfrac{nr}{N}\dfrac{(N-r)}{N}\dfrac{(N-n)}{(N-1)} .= \dfrac{5.7.6}{12.12.11} = 210/1584 = 0,1326 = 0,13.$

3.3.5. A DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Na distribuição binomial, a variável de interesse era o número de sucessos (ocorrências do evento A) em um intervalo discreto (n repetições do experimento E). Muitas vezes, entretanto, o interesse reside no número de sucessos em um intervalo contínuo, que pode ser de tempo, comprimento, superfície, etc. Para se caracterizar uma distribuição que leve em conta o número de sucessos (valores) em um intervalo contínuo, será suposto que:

(i) Eventos definidos em intervalos não sobrepostos são independentes;

(ii) Em intervalos de mesmo comprimento, são iguais as probabilidades de ocorrência de um mesmo número de sucessos;

(iii) Em intervalos muito pequenos, a probabilidade de mais de um sucesso é desprezível;

(iv) Em intervalos muito pequenos, a probabilidade de um sucesso é proporcional ao comprimento do intervalo.

Se os valores de uma variável satisfazem as hipóteses (i) a (iv) acima se dirá que ela segue um processo de Poisson.

Definição:

Seja X uma VAD definida por um processo de Poisson, assumindo os valores: 0, 1, ..., n, .., com taxa $\lambda > 0$.

Então:

$f(x) = P(X = x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, para x = 0, 1, 2, 3, ... , onde x é o número de eventos que ocorrem em um intervalo sobre o qual se espera uma média λ de ocorrências.

Além disso, X pode ser definida como o número de eventos que ocorrem sobre um período de tempo t, substituindo λ na equação acima por λt. Desta forma a distribuição de Poisson pode ser escrita como:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \text{ para } x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

A distribuição de Poisson será representada por P(λ).

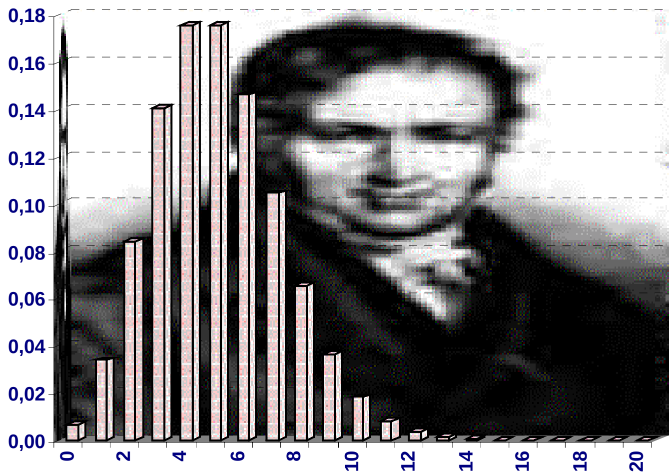


Figura 3.4 – A distribuição de Poisson P(5)

Exemplo 3.12

Em um certo tipo de fabricação de fita magnética, ocorrem defeitos a uma taxa de 1 a cada 2000 metros. Qual a probabilidade de que um rolo com 2000 metros de fita magnética:

(a) Não tenha defeitos?

(b) Tenha no máximo dois defeitos?

(c) Tenha pelo menos dois defeitos?

Solução:

Neste caso, tem-se:

λ = Taxa de defeitos a cada 2000 metros.

X = número de defeitos a cada dois mil metros.

x = 0, 1, 2, 3, ...

Então:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \text{ para } x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(a) $P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-1}1^0}{0!} = e^{-1} = 36,79\%$

(b) $P(X \le 2) = \frac{e^{-1}1^0}{0!} + \frac{e^{-1}1^1}{1!} + \frac{e^{-1}1^2}{2!} = \frac{5e^{-1}}{2} = 91,97\%$

(c) $P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - [\frac{e^{-1}1^0}{0!} + \frac{e^{-1}1^1}{1!}] = 1 - 2e^{-1} = 26,42\%$

Exemplo 3.13

[NET74] Um dado é formado por chapas de plástico de 10x10 cm. Em média aparecem 50 defeitos por metro quadrado de plástico, segundo uma distribuição de Poisson.

(a) Qual a probabilidade de uma determinada face apresentar exatamente 2 defeitos?

(b) Qual a probabilidade de o dado apresentar no mínimo dois defeitos?

(c) Qual a probabilidade de que pelo menos 5 faces sejam perfeitas?

Solução:

(a) Em média aparecem:

d = 50 defeitos/m^2 = 50/10 000 defeitos/cm^2

Como cada face tem a = 10cm x 10 cm = 100 cm^2, tem-se então:

λ = (50/10000) defeitos/cm^2 x 100 cm^2 = 0,5 defeitos por face.

A probabilidade de uma face apresentar dois defeitos será:

$$P(X = 2) = \frac{e^{-0,5}(0,5)^2}{2!} = 7,58\%$$

(b) No dado inteiro, a área total será a = 6x100 cm^2 = 600 cm^2 e o número médio de defeitos será então:

λ = (50/10000) defeitos /cm^2 x 600 cm^2 = 3 defeitos

A probabilidade de o dado apresentar no mínimo dois defeitos será:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + ... = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] =$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}1^1}{1!}\right] = = 1 - [0,0498 + 0,1494] = 80,08\%$$

(c) A probabilidade de pelo menos 5 faces perfeitas é:

$P(Y \geq 5) = P(Y = 5) + P(Y = 6)$. A probabilidade de uma face ser perfeita é a probabilidade de ela não apresentar defeitos, isto é:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-0,5}(0,5)^0}{0!} = 60,65\%$$

Tem-se então uma binomial Y com n = 6 (número de faces do dado) e p = 60,65% = probabilidade de uma face ser perfeita. Então a probabilidade de pelo menos 5 perfeitas, será:

$$P(Y \geq 5) = P(Y = 5) + P(Y = 6) = \binom{6}{5}.(0,6065)^5.(0,39350)^1 + \binom{6}{6}.(0,6065)^6.(0,3935)^0 = 24,36\%$$

3.3.6. PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Se X for uma VAD com distribuição de Poisson, então:

Média, expectância ou valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum x.f(x) = \sum x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \lambda$$

Variância

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \sum x^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} - \mu^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

O desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

3.3.7. RELAÇÃO ENTRE AS DISTRIBUIÇÕES BINOMIAL E POISSON

Seja X uma variável aleatória discreta com distribuição Binomial de parâmetros "n" e "p". Isto é:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x}.p^x.q^{n-x}$$

Admita-se que quando $n \to \infty$, tenha-se np = α = constante, ou de uma forma equivalente, quando $n \to \infty$, $p \to 0$, de modo que $np \to \alpha$. Nestas condições tem-se então:

$$\lim_{n\to\infty} P(X = x) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{x}.p^x.q^{n-x} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

O teorema diz essencialmente, que é possível obter uma aproximação das probabilidades binomiais com as probabilidades da distribuição de Poisson, toda vez que "n" seja grande e "p" seja pequeno.

Exemplo 3.14

Uma amostra de 50 peças é retirada da produção de uma máquina que trabalha com um índice de defeitos de 2%. Determinar a probabilidade de se encontrarem duas peças defeituosas na amostra.

Solução:

(a) Pela Binomial, tem-se:

$$P(X = 2) = \binom{50}{2}.(0{,}02)^2.(0{,}98)^{48} = 18{,}57\%$$

(b) Usando uma aproximação pela distribuição de Poisson de média μ = np = 50.0,02 = 1, tem-se:

$$P(X = 2) = \frac{e^{-1}1^2}{2!} = \frac{1}{2e} = 18,\ 39\%$$

3.4. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Seja E um experimento e S um espaço amostra associado. Se X é uma variável aleatória definida em S tal que X(S) seja infinito não-enumerável, isto é, X(S) seja um intervalo de números reais, então X é dita uma variável aleatória contínua.

Definição

Seja X uma variável aleatória contínua (VAC). A função f(x) que associa a cada $x \in X(S)$ um número real que satisfaz as seguintes condições:

(a) $f(x) \geq 0$, para todo $x \in X(S)$ e

(b) $\int_{X(S)} f(x)dx = 1$

É denominada de **função densidade de probabilidade (fdp)** da variável aleatória X.

Neste caso f(x) representa apenas a densidade no ponto x, ao contrário da variável aleatória discreta, f(x) aqui **não** é a probabilidade de a variável assumir o valor x.

3.4.1. CÁLCULO DE PROBABILIDADE COM UMA VAC

Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade f(x). Sejam a < b, dois números reais. Define-se:

$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$, isto é, a probabilidade de que X assuma valores entre os números "a" e "b" é a área sob o gráfico de f(x) entre os pontos x = a e x = b.

Neste caso, tem-se também:

(a) P(X = a) = 0, isto é, a probabilidade de que uma variável aleatória contínua assuma um valor isolado é igual a zero. Para variáveis contínuas só faz sentido falar em probabilidade em um intervalo, uma vez, que a probabilidade é definida como sendo a área sob o gráfico. f(x) não representa nenhuma probabilidade. Somente quando ela for integrada entre dois limites produzirá uma probabilidade.

(b) Se a < b são dois números reais então:

$P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$,

(c) Se uma função f* satisfizer às condições $f^*(x) \ge 0$ para todo x e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = k$, onde "k" é um número real positivo, mas não igual a 1, então f*(x) pode ser transformada numa fdp mediante a seguinte transformação:

f(x) = f*(x) / k , para todo x.

Neste caso a f(x) será uma função densidade de probabilidade.

(d) Se X assumir valores apenas num intervalo finito [a; b], pode-se simplesmente por f(x) = 0 para todo $x \notin [a; b]$. como conseqüência a fdp ficará definida para todos os valores reais de x e pode-se exigir que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Assim, sempre que a f(x) for especificada apenas num intervalo finito, deve-se supor que seja zero para todos os demais valores não pertencentes ao intervalo.

Exemplo 3.15

Seja X uma VAC com fdp dada por:

f(x) = 2x se 0 < x < 1
  = 0, para quaisquer outros valores.

Determinar a P(X < 1/2)

Solução:

$P(X < 1/2) = \int_0^{1/2} (2x)dx = 1/4 = 25\%$

3.4.2. A FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

Seja X uma VAC com função densidade de probabilidade f(x). Então a **função de distribuição acumulada** (FDA), ou simplesmente **função de distribuição** (FD) de X é a função F definida por:

$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$

Solução:

Suponha-se que X seja uma VAC com fdp dada por:

f(x) = 2x se 0 < x < 1
  = 0, para quaisquer outros valores.

Determinar a FD de X

Solução:

A função de distribuição de X é a função F tal que:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{x} 2udu = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

3.4.3. VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA (CARACTERIZAÇÃO)

Considere X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade f(x).

Expectância, esperança, média ou valor esperado de X

A média, expectância, **valor esperado** ou esperança matemática da variável aleatória contínua X, representada por μ ou E(X), é calculada por:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx$$

Obs. Não é garantido que esta integral exista (convirja) sempre.

A variância de X

Seja X uma variável aleatória contínua com média μ = E(X). Então a variância de X, anotada por σ^2 ou V(X) é definida por:

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2.f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)dx - \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

O desvio padrão

O desvio padrão da variável aleatória contínua X, anotado por σ, é a raiz quadrada da variância.

A variância relativa e o coeficiente de variação

Seja X uma variável aleatória contínua com média μ = E(X) e variância σ^2 = V(X). Então a variância relativa de X, anotada por: γ^2, é definida por:

$$\gamma^2 = \sigma^2 / \mu^2$$

O coeficiente de variação de X é definido como a raiz quadrada da variância relativa:

$$\gamma = \sigma / \mu$$

Exemplo 3.16

Determinar a expectância e a variância da VAC cuja fdp é dada por:

$f(x) = 3x^2$ se $-1 \leq x \leq 0$

$= 0$ caso contrário

Solução:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx = \int_{-1}^{0} x.(3x^2)dx = \int_{-1}^{0} (3x^3)dx = 3.\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = -3/4 = -0,75$$

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)dx - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.(3x^2)dx - (3/4)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} 3x^4 dx - (3/4)^2 = 3.\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0} - (3/4)^2$$

$= 3/80.$

3.5. DISTRIBUIÇÕES ESPECIAIS DE PROBABILIDADE CONTÍNUAS

Assim como ocorre com as variáveis discretas, existem algumas distribuições especiais de probabilidade contínuas que por sua freqüência de uso vale a pena estudar mais detalhadamente. Entre elas vale destacar as distribuições: uniforme, exponencial e normal.

3.5.1. A DISTRIBUIÇÃO UNIFORME

Definição:

Seja X uma VAC que pode tomar todos os valores num intervalo [a, b]. Se a probabilidade de a variável assumir valores num subintervalo for a mesma que para qualquer outro subintervalo de mesmo comprimento teremos então uma distribuição uniforme. A função densidade de probabilidade de uma VAC deste tipo será:

$f(x) = 1 / (b - a)$ para $a \leq x \leq b$

$= 0$ para qualquer outro valor.

3.5.2. PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO UNIFORME

As principais medidas para a distribuição uniforme podem ser determinadas de uma forma geral em termos dos extremos "a" e "b" do intervalo.

Média, expectância ou valor esperado

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx = \int_a^b x.\frac{1}{b-a}dx = (a + b) / 2$$

Variância

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.\frac{1}{b-a}dx - \left[\frac{(a+b)}{2}\right]^2 = (b - a)^2 / 12$$

Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

A FDA da distribuição uniforme

A FDA da distribuição uniforme, pode ser facilmente avaliada e, vale:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a}du = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

Exemplo 3.17

Seja X uma VAC com distribuição uniforme no intervalo [5, 10]. Determinar as probabilidades:

(a) $P(X < 7)$ **(b)** $P(X > 8,5)$

(c) $P(8 < x < 9)$ **(d)** $P(|x - 7,5| > 2)$

Solução:

Utilizando a FDA da variável vem:

(a) P(X < 7) = F(7) = (7 - 5) / (10 - 5) = 2 / 5 = 40%

(b) P(X > 8,5) = 1 - P(X < 8,5) = 1 - F(8,5) = 1 - (8,5 - 5) / (10 - 5) = 1 - 3,5 / 5 = 1 - 0,70 = 30%

(c) P(8 < X < 9) = F(9) - F(8) = (9 - 5) / (10 - 5) - (8 - 5) / (10 - 5) = 4 / 5 - 3 / 5 = 1 / 5 = 20%

(d) P(|X - 7,5| > 2) = P(X - 7,5 > 2 ou X - 7,5 < -2) = P(X > 9,5 ou X < 5,5) = 1 - F(9,5) + F(5,5) = 20%

3.5.3. A DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

Definição:

Uma variável aleatória contínua T tem uma distribuição exponencial de parâmetro λ se sua função densidade de probabilidade f(t) for do tipo:

$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ para t > 0

= 0 caso contrário

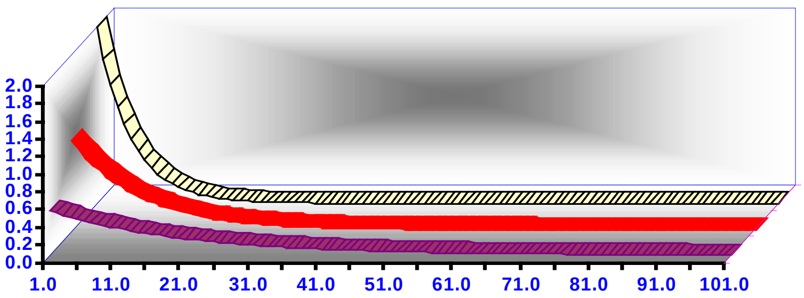


Figura 3.5 – Exemplos de distribuições exponenciais: P(2), P(1,5) e P(0,6).

Exemplo 3.18

Suponha que um componente eletrônico tenha um tempo de vida T (em unidades de 1000 horas) que segue uma distribuição exponencial de parâmetro λ = 1. Suponha que o custo de fabricação do item seja R$ 2,00 e que o preço de venda seja R$ 5,00. O fabricante garante total devolução se t < 0,90. Qual o lucro esperado por item?

Solução:

Neste caso, tem-se:

$f(t) = e^{-t}$ para t > 0

A probabilidade de um componente durar menos de 900 horas é dada por:

$P(T < 0{,}90) = \int_0^{0,9} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{0,9} = -e^{-0,9} + e^{0} = 1 - 1/e^{0,9} = 59{,}34\%$

Desta forma o lucro do fabricante será uma VAD X com a seguinte distribuição:

x	-2	3
f(x)	0,5934	0,4066

Então o lucro esperado será:

E(X) = -2.0,5934 + 3.0,4066 = R$ 0,03

3.5.4. PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

Se T for uma VAC com distribuição Exponencial, então:

Média, expectância ou valor esperado

$\mu = E(X) = \int_0^\infty t.f(t)dt = \int_0^\infty t.\lambda e^{-\lambda t}dt = 1/\lambda$

Variância

$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \int_0^\infty t^2.\lambda e^{-\lambda t}dx - \lambda^2 = 1/\lambda^2$

O desvio padrão

$\sigma = \sqrt{1/\lambda^2} = 1/\lambda$

A FDA da distribuição Exponencial

A FDA da distribuição Exponencial é dada por:

$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda u}du = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

Portanto $P(X \geq x)$ 1 - F(x) = 1 - [1 - $e^{-\lambda t}$] = $e^{-\lambda t}$

A distribuição Exponencial não tem memória

A distribuição Exponencial apresenta uma propriedade interessante que é denominada de falta de memória, ou seja:

$P(X \geq s + t / X \geq s) = P(X \geq s + t \cap X \geq s) / P(X \geq s) = P(X \geq s + t) / P(X \geq s) = e^{-\lambda(s+t)} / e^{-\lambda s} = e^{-\lambda t}$

Portanto $P(X \geq s + t / X \geq s) = P(X \geq t)$

Relação com a distribuição de Poisson

Deve-se observar inicialmente que fixado um tempo, a probabilidade de não ocorrências de eventos neste intervalo é dado por:

$f(0) = P(X = 0) = [(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}] / 0! = e^{-\lambda t}$

Se a variável aleatória contínua T representar o tempo passado entre a ocorrência de dois eventos de Poisson, então a probabilidade da não ocorrência no tempo "t" é igual a probabilidade de que o tempo T entre ocorrências seja maior que "t", isto é:

$P(T > t) = e^{-\lambda t}$

Tem-se ainda que:

$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Que conforme já visto é a função acumulada da variável aleatória exponencial de parâmetro λ, isto é:

$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

3.5.5. A DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Um dos principais modelos de distribuição contínua é a curva normal ou de Gauss. Sua importância para a Estatística (prática) reside no fato que muitas variáveis encontradas na natureza se distribuem de acordo com o modelo normal. Este modelo também tem uma importância teórica devido ao fato de ser uma *distribuição limite*.

Uma variável aleatória contínua X tem uma distribuição normal (ou Gaussiana) se sua função densidade de probabilidade for do tipo:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \text{ para } -\infty \le x \le \infty$$

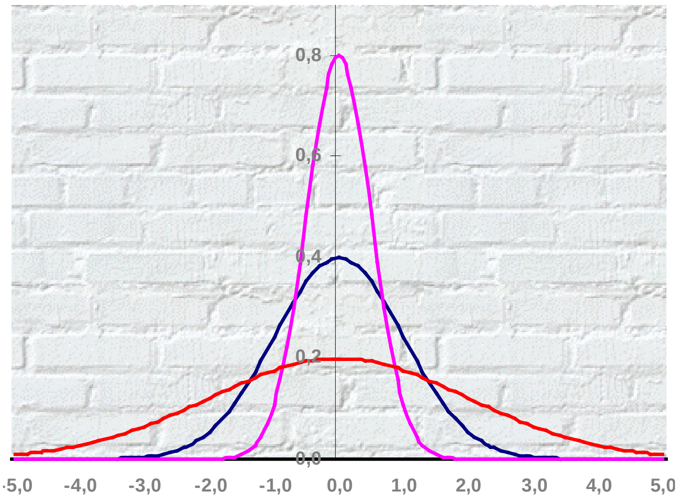


Figura 3.6 – Distribuições normais: N(0; 1/2), N(0; 1) e N(0; 2)

3.5.6. PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Se X for uma VAC com distribuição Normal, então:

Média, expectância ou valor esperado

$E(X) = \mu$, isto é, o parâmetro μ é a média da distribuição normal.

Variância

$V(X) = \sigma^2$, isto é, a variância da distribuição normal é o parâmetro σ ao quadrado.

O desvio padrão

O desvio padrão da distribuição normal é o parâmetro σ.

FDA da distribuição Normal

A função de distribuição (FDA) da normal reduzida é representada por:

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

Esta integral, e aliás como de qualquer outra normal, não pode ser avaliada pelo método tradicional (teorema fundamental do cálculo). Ela só pode ser calculada por métodos numéricos. E por isso ela é encontrada tabelada em qualquer livro texto de Probabilidade ou Estatística.

Outras propriedades

(a) Transformação linear de uma variável aleatória normal

Se X tiver uma distribuição N(μ,σ) e se Y = aX + b, então Y terá a distribuição N(aμ + b, aσ)

(b) Combinação linear de variáveis aleatórias normais independentes

A combinação linear de variáveis aleatórias normais independentes será uma variável aleatória normalmente distribuída.

(c) f(x) → 0 quando x → ∞ ou -∞.

(d) μ - σ e μ + σ são os pontos de inflexão da função f(x), isto é, são os valores onde o gráfico da função muda o sinal da curvatura.

(e) x = μ é o ponto de máximo de f(x) e este máximo vale $1/\sigma\sqrt{2\pi}$.

(f) f(x) é simétrica ao redor de x = μ , isto é: f(μ + x) = f(μ - x)

(g) Se X tem uma distribuição normal de média μ e desvio padrão σ se escreverá:

X : N(μ, σ)

(h) Quando μ = 0 e σ = 1, tem-se uma distribuição normal padrão ou normal reduzida. A variável normal +padrão será anotada por Z. Então Z : N(0, 1). A função densidade de probabilidade da variável aleatória Z será representada por:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \text{ para } -\infty \le z \le \infty$$

(i) Se X é uma N(μ, σ), então Z = (X - μ) / σ é a normal padrão ou reduzida. Isto significa que qualquer curva normal poderá ser padronizada, mediante esta transformação.

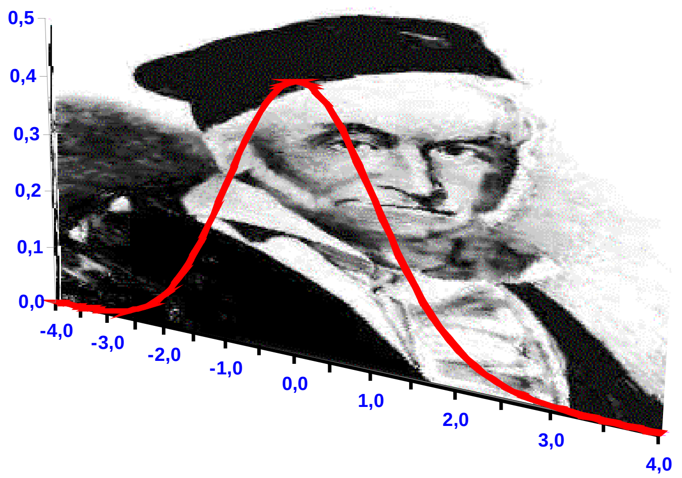


Figura 3.7 - Distribuição Normal Padrão

3.5.7. TABELAS

A forma de se calcular probabilidade com qualquer distribuição normal é através da tabela da normal padrão. Assim se X : N(μ, σ) então primeiro é necessário padronizar X, isto é, fazer:

Z = (X - μ) / σ.

Em seguida obter em uma tabela o valor da probabilidade, isto é, o valor:

P(Z ≤ z) = Φ(z)

Este valor $\Phi(z)$ pode ser lido como "valor tabelado de z" e significa a probabilidade de a variável aleatória contínua $Z = (X - \mu) / \sigma$ assumir valores à esquerda (abaixo de) do valor particular "z".

Lembrar que qualquer tabela é construída fornecendo os valores da FDA de Z. A maioria delas fornece as probabilidades de $Z \leq z$ para valores de z entre -3,09 e +3,09 e com aproximação centesimal. Algumas fornecem valores de z entre 0 e 3,09

Assim o primeiro valor tabelado é em geral $\Phi(-3{,}09) = P(Z \leq -3{,}09)$ que vale 0,0000, isto é, é zero com uma aproximação de 4 decimais. O valor seguinte seria $\Phi(-3{,}08) = P(Z \leq -3{,}08) = 0{,}0001$.

O último valor tabelado é, em geral, $\Phi(3{,}09) = P(Z \leq 3{,}09) = 1{,}000$, pois é o valor acumulado, isto quer dizer, que até este valor tem-se a totalidade da área útil sob a curva avaliada com uma aproximação de 4 decimais.

Convém ressaltar que as tabelas sendo da FDA de Z fornecem a área à esquerda de um valor qualquer "z". No entanto, como a curva é simétrica, se quiséssemos, a área à direita de "z", basta observar que:

$$P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$$

Exemplo 3.19

Seja Z uma N(0, 1). Determinar as seguintes probabilidades:

(a) $P(Z < 2{,}23)$ **(b)** $P(Z > -1{,}45)$

(c) $P(-2 < Z \leq 2)$ **(d)** $P(-1 \leq Z \leq 1)$

Solução:

(a) $P(Z < 2{,}23) = \Phi(2{,}23) = 98{,}71\%$

(b) $P(Z > -1{,}45) = 1 - P(Z \leq -1{,}45) = 1 - \Phi(-1{,}45) = 1 - 0{,}0735 = 92{,}65\%$

(c) $P(-2 < Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0{,}9772 - 0{,}0228 = 95{,}44\%$

(d) $P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 68{,}26\%$

Exemplo 3.20

Seja X uma VAC com distribuição N(10, 2). Determinar:

(a) $P(X < 10)$ **(b)** $P(X > 11{,}50)$

(c) $P(8 < Z \leq 12)$ **(d)** $P(6{,}08 \leq Z \leq 13{,}92)$

Solução:

Neste caso, antes de se poder procurar os valores na tabela é necessário padronizar cada valor de X, através da expressão:

$$Z = (X - \mu) / \sigma = (X - 10) / 2$$

(a) $P(X < 10) = P((X - 10) / 2 < (10 - 10) / 2) = P(Z < 0) = \Phi(0) = 50\%$

(b) $P(X > 11{,}50) = P(Z > (11{,}50 - 10) / 2) = P(Z > 0{,}75) = 1 - \Phi(0{,}75) = 22{,}66\%$

(c) $P(8 < X \leq 12) = P(-1 < Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 68{,}26\%$

(d) $P(6{,}08 \leq X \leq 13{,}92) = P(-1{,}96 < Z \leq 1{,}96) = \Phi(1{,}96) - \Phi(-1{,}96) = 0{,}9750 - 0{,}0250 = 95\%$

3.5.8. RELAÇÃO ENTRE AS DISTRIBUIÇÕES BINOMIAL E NORMAL

Seja X uma variável aleatória distribuída binomialmente com parâmetros "n" e "p". Isto é:

$$P(X = x) = \binom{n}{x}.p^x.q^{n-x}$$

Quando o número de provas "n" cresce (tende ao infinito) a distribuição binomial tende a uma distribuição normal de média μ = np e desvio padrão $\sigma = \sqrt{npq}$

Em geral admite-se que para np ≥ 5 e nq ≥ 5, "n" já será suficientemente grande para se poder aproximar uma distribuição binomial pela normal.

No entanto, devido ao fato de se estar aproximando uma distribuição discreta, através de uma contínua, recomenda-se para se obter maior precisão, realizar uma *correção de continuidade* que consiste em transformar, por exemplo, P(X = x) no intervalo P(x - 0,5 < X < x + 0,5) e o mesmo em qualquer outra situação.

Exemplo 3.21

No lançamento de 30 moedas honestas, qual a probabilidade de saírem:

(a) Exatamente 12 caras?

(b) Mais de 20 caras?

Solução:

(a) A probabilidade de saírem 12 caras é dada pela distribuição binomial por:

$$P(X = 12) = \binom{30}{12}.0,5^{12}.0,5^{18} = 8,06\%$$

Aproximando pela normal tem-se:

μ = np = 30.(1/2) = 15

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{30.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = 2,7386$$

Então P(X =12) calculado pela normal com utilização da correção de continuidade será:

P(X =12) ≅ P(11,5 < X < 12,5) = P(-1,28 < Z < -0,91) = 0,3997 - 0,3186 = 8,11%, que não é muito diferente do valor exato 8,06%.

(b) $P(X > 20) = \sum_{i=21}^{30}\binom{30}{i}.\left(\frac{1}{2}\right)^{i}.\left(\frac{1}{2}\right)^{30-i} = 2,14\%$

Aproximando pela normal, tem-se:

P(X > 20,5) = 0,5000 - 0,4778 = 2,22%

3.6. PROPRIEDADES DA MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

3.6.1. MÉDIA

(1) A média de uma constante é igual a própria constante.

E(k) = k, onde k = constante

(2) Se multiplicarmos os valores de uma variável aleatória por uma constante, a média fica multiplicada por esta constante.

E(kX) =k.E(X)

(3) Se os valores de uma variável aleatória forem somados a uma constante a média ficará igualmente somada dessa constante.

E(X ± k) = E(X) ± k

(4) A média de uma soma ou diferença de duas variáveis aleatórias é igual a soma ou diferença das médias dessas variáveis.

$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

(5) A média do produto de duas variáveis aleatórias **independentes** é igual ao produto das médias dessas variáveis.

$E(X.Y) = E(X).E(Y)$

3.6.2. VARIÂNCIA

(1) A variância de uma constante é nula

$V(k) = 0$

(2) Se multiplicarmos os valores de uma variável aleatória por uma constante, a variância fica multiplicada pelo quadrado da constante.

$V(kX) = k^2.V(X)$

(3) Se os valores de uma variável aleatória forem somados a uma constante a variância não se altera.

$V(X \pm k) = V(X)$

(4) A variância de uma soma ou diferença de duas variáveis aleatórias **independentes** é igual a soma das variâncias dessas variáveis.

$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$

3.6.3. A MEDIANA E A MODA

A **mediana** de uma variável aleatória é o valor que divide a distribuição em duas partes eqüiprováveis. Será representada por **md.** Então:

$P(X < md) = P(X > md) = 0{,}50$.

Este ponto sempre existe se a variável é contínua, onde a mediana pode ser definida como sendo o ponto tal que F(md) = 0,50. No caso discreto pode haver todo um intervalo que satisfaz a relação acima, convenciona-se em geral adotar o ponto médio deste intervalo. Pode-se ainda, neste caso, definir a mediana como sendo o menor valor para o qual F(md) > 0,5.

A **moda** é o(s) ponto(s) de maior probabilidade, no caso discreto, ou maior densidade de probabilidade no caso contínuo. É representada por **mo**.

3.6.4. DESIGUALDADES DE TCHEBYCHEFF E CAMP-MEIDELL

Pode-se demonstrar que, para qualquer distribuição de probabilidade que possua média μ e desvio padrão σ, tem-se, para qualquer número "k > 1":

$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$ (Desigualdade de **Tchebycheff**, Tchebichev ou Chebyshev, 1821 - 1894), ou de forma equivalente

$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - 1/k^2$

Se a distribuição for unimodal e simétrica, então:

$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 4/9k^2$ (Desigualdade de **Camp-Meidell**)

Estas desigualdades fornecem as probabilidades de que os valores de uma variável aleatória (qualquer) esteja num intervalo simétrico em torno da média de amplitude igual a 2k desvios padrões. Assim se k = 2, por exemplo, a desigualdade de Tchebycheff estabelece que o percentual de valores da variável aleatória que está compreendida no intervalo $\mu \pm 2\sigma$ é de pelo menos 1 - 1/4 = 75%. Conforme visto pela normal este percentual vale exatamente 95,44%. Mas como a normal é simétrica e unimodal, neste caso, um resultado mais próximo é dado pela desigualdade de Camp-Meidell, isto é, $1 - 4/9k^2 = 1 - 1/9 = 88{,}89\%$.

Exemplo 3.22

Compare o limite superior da probabilidade $P[(X - \mu| \geq 2\sigma)]$, obtida pela desigualdade de Tchebycheff, com a probabilidade exata se X for uniformemente distribuída sobre (-1, 3).

Solução:

Para uma distribuição uniforme tem-se $\mu = (a + b) / 2 = (-1 + 3) / 2 = 1$ e

$V(X) = (b - a)^2 / 12 = 4/3$

Então: $P(|X - \mu| \geq k\sigma) = P(|X - 1| \geq 4\frac{\sqrt{3}}{3}) = 0$ é a probabilidade exata.

Por Tchebycheff, teríamos:

$P(|X - \mu| \geq k\sigma) = P(|X - 1| \geq 4\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1/4$.

4. EXERCÍCIOS

(01) Encontre a quantidade de números de dois dígitos que não contenham dígitos repetidos.

(02) Quantos divisores positivos tem o número 3 888?

(03) As novas placas de automóveis contém 3 letras seguidas de 4 números. Quantas placas diferentes podem ser formadas com esta combinação.

(04) Em relação a palavra filtro, quantos:

(04.1) Anagramas existem?

(04.2) Anagramas começam com L?

(04.3) Anagramas começam com O e terminam em I?

(04.4) Anagramas começam com consoante?

(05) Um conjunto A tem 45 subconjuntos com dois elementos. Quantos são os elementos de A?

(06) Em uma urna colocam-se bolas numeradas de 1 a 3; numa segunda urna, bolas numeradas de 4 a 7 e em uma terceira urna, bolas numeradas com os algarismos 0, 5, 9 e 8. Retiram-se sucessivamente duas bolas da primeira urna, uma da segunda, e três da terceira, enfileirando-as da esquerda para à direita à medida que forem sendo retiradas. Os algarismos das seis bolas extraídas, dispostas desta forma, formam um número. Pergunta-se:

(06.1) Quantos são os números possíveis?

(06.2) Quantos são os pares que se consegue obter desta forma?

(06.3) Quantos são divisíveis por 25?

(07) Em um computador digital um "bit" é um dos algarismos "0" ou "1" e uma "palavra" é uma seqüência de bits. Qual o número de "palavras" distintas" em um computador de 32 bits?

(08) Dados "n" pontos de um plano, sendo três quaisquer não alinhados, quantos são:

(08.1) Os segmentos de reta que os ligam 2 a 2?

(08.2) Os triângulos, cujos vértices são escolhidos entre os pontos?

(09) Em uma urna há m bolas coloridas, sendo m_1 brancas, m_2 pretas, m_3 vermelhas e m_4 azuis. Retiram-se simultaneamente "p" bolas, onde $p \leq m$. Quantos são:

(09.1) Os casos possíveis?

(09.2) Os casos em que aparecem p_1 brancas, p_2 pretas, p_3 vermelhas e p_4 azuis, sendo $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = p$?

(09.3) Os casos em que não aparecem bolas brancas?

(10) Com as 6 letras: a, b, c, d, e, f quantas palavras-código de 4 letras poderão se formadas se:

(10.1) Nenhum letra puder ser repetida?

(10.2) Qualquer letra puder ser repetida qualquer número de vezes?

(11) Em um certo hospital, os seguintes dados de pacientes foram registrados:

25 com antígeno A	30 com o antígeno Rh
17 com os antígenos A e B	12 sem antígenos
27 com o antígeno B	16 com os antígenos A e Rh
22 com os antígenos B e Rh	15 com os três antígenos

Com base nestes dados, determine quantos pacientes:

(11.1) Estão representados aqui? **(11.2)** Tem exatamente um antígeno?

(11.3) Tem exatamente dois antígenos? **(11.4)** Tem sangue O positivo?

(11.5) Tem sangue AB positivo? **(11.6)** Tem sangue B negativo?

(11.7) Tem sangue O negativo? **(11.8)** Tem sangue A positivo?

(12) Quatro moedas são lançadas e observa-se a seqüência de caras e coroas obtida. Qual o espaço amostra do experimento.

(13) Uma urna contém duas bolas brancas (B) e três bolas vermelhas (V). Retira-se uma bola ao acaso da urna. Se for branca, lança-se uma moeda; se for vermelha, ela é devolvida à urna e retira-se outra bola. Dê uma espaço amostra para o experimento.

(14) Três times A, B e C disputam um torneio de futebol. Inicialmente, A joga com B e o vencedor joga com C, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes em seguida ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas. Enumere os resultados do espaço amostra: resultados possíveis do torneio.

(15) Uma moeda e um dado são lançados. Dê o espaço amostral correspondente.

(16) Considerando dois eventos A e B de um mesmo espaço amostra S, expresse em termos de operações entre eventos:

(16.1) A ocorre mas B não ocorre;

(16.2) Exatamente um dos eventos ocorre;

(16.3) Nenhum dos eventos ocorre.

(17) Dois dados são lançados. Define-se os eventos: A = soma dos pontos obtidos igual a 9, e B = o ponto do primeiro dado é maior ou igual a 4. Determine os eventos A e B e ainda os eventos: $A \cup B$, $A \cap B$ e $\overline{A}$

(18) Uma urna contém 12 moedas de igual tamanho, sendo 7 douradas e 5 prateadas. O experimento consiste em retirar, **sem** reposição e ao acaso, duas moedas desta urna. Calcular a probabilidade de que saiam:

(18.1) Uma moeda dourada e uma prateada, nesta ordem.

(18.2) Uma moeda dourada e uma prateada.

(18.3.) Duas moedas douradas.

(18.4) Duas moedas de mesma cor.

(19) Resolva o exercício **um** considerando a retirada das moedas **com** reposição.

(20) sejam P(A) = 0,3, P(B) = 0,8 e $P(A \cap B)$ = 0,15.

(20.1) A e B são mutuamente exclusivos? Justifique.

(20.2) Qual a $P(\overline{B})$?

(20.3) Determine (a) P(AUB) (b) $P(A \cap \overline{B})$ (c) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ (d) $P(\overline{A} \cap B)$

(21) Suponha que A e B sejam eventos tais que P(A) = x, P(B) = y e $P(A \cap B)$ = z. Exprima cada uma das seguintes probabilidades em termos de "x", "y" e "z".

(21.1) P(AUB) **(21.2)** $P(\overline{A})$ **(21.3)** $P(\overline{B})$ **(21.4)** P(A/B) **(21.5)** $P(\overline{A} U \overline{B})$

(21.6) $P(\overline{A} UB)$ **(21.7)** $P(\overline{A} \cap B)$ **(21.8)** $P(A \cap \overline{B})$ **(21.9)** $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ **(21.10)** $P(\overline{A} / \overline{B})$

(22) Uma amostra de 140 investidores de um banco revelou que 80 investem em poupança, 30 investem no fundão e 10 investem na poupança e no fundão. Selecionado um destes investidores ao acaso, qual a probabilidade de que ele tenha investimentos na poupança ou no fundão?

(23) A probabilidade de um aluno A resolver uma questão de prova é 0,80, enquanto que a do aluno B é 0,60. Qual a probabilidade de que a questão seja resolvida se os dois alunos tentarem resolvê-la independentemente.

(24) Um atirador A tem probabilidade de 1/4 de acertar um alvo. Já um atirador B tem probabilidade de 2/5 de acertar o mesmo alvo. Se ambos atirarem simultaneamente e independentemente, qual a probabilidade de que:

(24.1) Ao menos um deles acerto o alvo e **(24.2)** Ambos acertem o alvo?

(25) Sejam A e B dois eventos mutuamente excludentes. A probabilidade de ocorrência de ao menos um destes eventos é 0,52 e a probabilidade de A não ocorrer é 0,60. Calcule a probabilidade de B ocorrer?

(26) Sejam: P(A) = 0,50; P(B) = 0,40 e P(AUB) = 0,70.

(26.1) A e B são eventos mutuamente excludentes? Por que?

(26.2) Qual o valor de $P(A \cap B)$.

(26.3) A e B são eventos independentes? Por que?

(26.4) Quais os valores de P(A/B) e P(B/A).

(27) Uma turma é composta de 9 alunos de Economia, 14 de Administração e 21 de Contábeis. Deseja-se eleger ao acaso uma comissão de dois alunos dessa turma. Calcule a probabilidade de que esta comissão seja formada por:

(27.1) Alunos só da Economia.

(27.2) Um aluno da Economia e outro de outro curso.

(27.3) Um aluno da Economia e outro da Contábeis.

(27.4) Dois alunos da Administração ou dois da Contábeis.

(28) Um produtor de parafusos verificou que em uma amostra de 100 parafusos 5 eram defeituosos. Numa segunda amostra de 200 parafusos ele encontrou 9 defeituosos. Você diria que a probabilidade de o próximo parafuso a ser produzido ter defeito é 0,05? Ou 0,045? Explique?

(29) Se o jogo um da loteria esportiva for marcado na coluna dois, então é possível afirmar que a probabilidade de acertar este jogo é de 1/3? Por que?

(30) Dois números são escolhidos ao acaso e sem reposição, dentre 6 números positivos e 8 negativos, e então multiplicados. Calcule a probabilidade de que o produto seja positivo.

(31) Os lugares de 6 pessoas em uma mesa circular são determinados por sorteio. Qual a probabilidade de Aristeu e Fariseu se sentem lado a lado?

(32) Suponha-se que são retiradas duas bolas, **sem** reposição, de uma caixa contendo 3 bolas pretas e 5 bolas vermelhas. Determine:

(32.1) Todos os resultados possíveis e suas respectivas probabilidades.

(32.2) Todos os resultados possíveis e suas probabilidades supondo a extração **com** reposição da primeira bola retirada.

(33) Uma caixa contém 4 válvulas defeituosas e 6 perfeitas. Duas válvulas são extraídas juntas. Uma delas é ensaiada e se verifica ser perfeita. Qual a probabilidade de que a outra válvula também seja perfeita?

(34) Um dado é viciado, de tal forma que a probabilidade de sair um certo ponto é proporcional ao seu valor (por exemplo o ponto 4 é duas vezes mais provável do que o ponto dois). Calcular:

(34.1) A probabilidade de sair 5, sabendo-se que o ponto que saiu é ímpar.

(34.2) A probabilidade de sair um número par, sabendo que saiu um número maior do que 3.

(35) A probabilidade de que dois eventos independentes ocorram são *p* e *q*, respectivamente. Qual a probabilidade de que:

(35.1) Nenhum destes eventos ocorra. **(35.2)** Pelo menos um destes eventos ocorra

(36) Calcular a P(A) sabendo que: P(AB) = 0, 72 e P($A\bar{B}$) = 0,18.

(37) Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa e um prato à base de carne. 20% dos fregueses do sexo masculino preferem salada; 30% das mulheres escolhem carne; 75% dos fregueses são homens. Considere os seguintes eventos:

H: o freguês é homem A: O freguês prefere salada

M: O freguês é mulher B: O freguês prefere carne

Calcular:

(37.1) P(H) **(37.2)** P(A/H) **(37.3)** P(B/M) **(37.4)** P(A∩H)

(37.5) P(A∪H) **(37.6)** P(M/A)

(38) Uma companhia de seguros analisou a freqüência com que 2000 segurados (1000 homens e 1000 mulheres) usaram o hospital. Os resultados estão apresentados na tabela:

	Homens	Mulheres
Usaram o hospital	100	150
Não usaram o hospital	900	850

(38.1) Qual a probabilidade de que uma pessoa segurada use o hospital?

(38.2) O uso do hospital independe do sexo do segurado?

(39) As probabilidades de 3 motoristas serem capazes de dirigir até em casa com segurança, depois de beber, são: 1/3, 1/4 e 1/5. Se decidirem (erradamente) dirigir até em casa, depois de beber numa festa, qual a probabilidade de todos os 3 motoristas sofrerem acidentes? Qual a probabilidade de que ao menos um chegue em casa a salvo?

(40) Duas lâmpadas queimadas foram misturadas acidentalmente com 6 lâmpadas boas. Se as lâmpadas forem sendo testadas, uma a uma, até encontrar as duas queimadas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste?

(41) Num teste com duas marcas que lhe são apresentadas em ordem aleatória, um experimentador de vinhos faz três identificações corretas em três tentativas.

(41.1) Qual a probabilidade disto ocorrer, se na realidade ele não possui habilidade alguma para distinguir?

(41.2) E se a probabilidade de distinguir corretamente é de 90% em cada tentativa?

(42) Dados que dois acontecimentos A e B ocorrem independentemente com probabilidades p e q respectivamente, determine a probabilidade da ocorrência de um e somente um destes acontecimentos.

(43) Dois aparelhos de alarme funcionam de forma independente, detectando problemas com probabilidades de 0,95 e 0,90. Determinar a probabilidade de que dado um problema, este seja detectado por somente um dos aparelhos.

(44) Sejam A e B dois eventos. Suponha que P(A) = 0,40, enquanto P(A∪B) = 0,70. Seja P(B) = p.

(44.1) Para que valor de "p", A e B serão mutuamente excludentes?

(44.2) Para que valor de "p", A e B serão independentes?

(45) Um aparelho é escolhido ao acaso dentre 10 aparelhos, sendo que destes 6 funcionam sem falhas com uma probabilidade de 80% e os outros quatro funcionam sem falhas com uma probabilidade de 95%. Determinar a probabilidade de que o aparelho escolhido funcione sem falhas.

(46) Três máquinas A, B e C apresentam respectivamente: 10%, 20% e 30% de defeituosos na sua produção. Se a três máquinas produzem igual quantidade de peças e retiramos duas peças ao acaso da produção global qual a probabilidade de que ambas sejam perfeitas?

(47) Dentre 5 máquinas existem 3 de maior precisão que garantem um acerto de 95% e as duas restantes garantem um acerto de 75%. Escolhida uma máquina ao acaso qual a probabilidade de acerto?

(48) Das peças fornecidas por duas máquinas automáticas 60% e 84%, respectivamente, são de alta qualidade. A produtividade da primeira máquina é o dobro do que a da segunda máquina. Retirada uma peça ao acaso de um lote produzido pelas duas máquinas verificou-se que ela era de alta qualidade. Determinar a probabilidade de que tenha sido produzida pela primeira máquina.

(49) Uma caixa contém quatro moedas, uma das quais com duas caras. Uma moeda foi tomada ao acaso e jogada duas vezes, obtendo-se duas caras. Qual a probabilidade de que seja a moeda com duas caras?

(50) Cada objeto manufaturado é examinado com probabilidade 0,55 por um fiscal e com probabilidade 0,45 por outro fiscal. A probabilidade de passar no exame de acordo com os fiscais é de 0,90 e de 0,98 respectivamente. Achar a probabilidade de que um objeto aceito tenha sido examinado pelo segundo fiscal.

(51) Um carro pode parar por defeito elétrico ou mecânico. Se há defeito elétrico o carro para na proporção de 1 para 5 e, se mecânico, 1 para 20. Em 10% das viagens há defeito elétrico e em 20% mecânico, não ocorrendo mais de um defeito na mesma viagem, igual ou de tipo diferente. Se o carro para, qual a probabilidade de ser por defeito elétrico?

(52) Considere uma urna contendo 3 bolas vermelhas e 5 pretas. Retira-se 3 bolas, sem reposição, e é definida a variável aleatória X = número de bolas pretas retiradas. Determine a distribuição de X.

(53) Um dado é jogado 3 vezes. Seja X o número de pontos "um" que aparece. Estabeleça a distribuição de probabilidade de X.

(54) Uma caixa contém 3 bolas brancas e uma preta. Uma pessoa vai retirar as bolas uma a uma, até conseguir apanhar a bola preta. Seja X o número de tentativas que serão necessárias. Determine a distribuição de probabilidade de X e calcule a média e a variância de X.

(55) Dois tetraedros regulares têm suas faces numeradas de 1 a 4. Jogam-se ambos e somam-se os pontos das faces que ficarem voltadas para cima. Sabendo-se que a soma obtida é maior do que 4, determine a distribuição de probabilidade dessa soma.

(56) Uma caixa contém 4 bolas brancas e 3 bolas pretas. Estabeleça a distribuição de probabilidade do número de bolas retiradas uma a uma e sem reposição até sair a última bola preta. Calcule a média, moda e desvio padrão dessa variável aleatória.

(57) Uma pessoa joga 3 moedas e ganha R$ 6,00 se obtiver só caras ou só coroas. Quanto deve pagar se perder, para que o jogo seja eqüitativo (não perca e nem ganhe)?

(58) Em um certo empreendimento comercial, um empresário pode ter um lucro de R$ 300 com uma probabilidade de 0,60 ou então um prejuízo de R$ 100 com uma probabilidade de 0,40. Determinar o lucro médio do empreendimento.

(59) O tempo T, em minutos, para que um operário processe certa peça é uma VAD com distribuição dada na tabela abaixo.

t	2	3	4	5	6	7
f(t)	0,10	0,10	0,30	0,20	0,20	0,10

(59.1) Calcule o tempo médio de processamento.

(59.2) Para cada peça processada o operário ganha um fixo de R$ 2,00, mas se processa a peça em menos de 6 minutos, ganha R$ 0,50 por cada minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em 4 minutos, recebe a quantia de R$ 1,00. Encontre a média e a variância de G = quantia ganha por peça.

(60) No jogo de roleta, a pessoa escolhe um número entre 37 (de 0 a 36) e aposta x, sendo que , se ganhar, recebe 35x. Quantas vezes se espera que jogue um jogador inveterado que aposta sempre R$ 2,00 e um só número e dispõe de R$ 50,00?

(61) O conjunto de resultados igualmente possíveis de uma variável aleatória X é X(S) = { 0, 1, 2, 3, 4}. Represente em uma tabela a distribuição de X e calcule a expectância e a variância de X.

(62) Seja f(x) = 0,1x a função de probabilidade da variável aleatória com conjunto de resultados X(S) = { 1, 2, 3, 4 }. Represente a função de probabilidade em uma tabela e determine: E(x) e V(X).

(63) Um agente quer aplicar no mercado financeiro com o objetivo de fazer muitas aplicações mensais sucessivas. Ele dispõem de duas opções, mas usará a de maior rentabilidade. Ele deve optar entre:

I - CDB com renda de 3% ao mês e sem riscos ou

II - Bolsa de valores com renda de 6% ao mês com probabilidade 0,46, 4% com probabilidade 0,45 ou prejuízo de 15% ao mês com probabilidade de 0,09.

Qual a opção mais lucrativa para o agente?

(64) Ao apostar R$ 100 no preto de uma roleta um apostador pode ganhar R$ 100 com probabilidade 17/37, perder este mesmo valor com probabilidade de 18/37 ou não ganhar nada com probabilidade 2/37. Utilize a expectância para determinar qual o lucro ou prejuízo esperado em 370 apostas deste mesmo valor?

(65) Pilhas de uma certa marca são acondicionadas de modo causal em embalagens de quatro pilhas. O produtor desta marca opera com probabilidade de 0,04 de uma pilha ser defeituosa.

(65.1) Calcule a probabilidade de que uma embalagem tomada ao acaso contenha:

(a) Exatamente uma pilha defeituosa **(b)** Somente pilhas perfeitas

(c) No máximo duas pilhas defeituosas.

(65.2) Quantas defeituosas deve-se esperar que existam, em média, por embalagem?

(66) Qual a probabilidade de obtermos exatamente duas caras em 8 lançamentos de uma moeda equilibrada?

(67) Uma turma tem 50 alunos, sendo 20 do sexo masculino. Deseja-se através de um sorteio que atribua a cada aluno da turma a mesma probabilidade de ser eleito, formar uma comissão de 4 alunos. Deseja-se também, determinar a probabilidade de a comissão resultante ter exatamente um aluno do sexo feminino. Você usaria o modelo binomial para calcular tal probabilidade? Por que?

(68) Qual a probabilidade de se obter duas ou menos faces 2 em 7 lançamentos de um dado equilibrado?

(69) A probabilidade de um parafuso produzido por uma empresa ser defeituoso é 0,03. Seja X a variável “número de parafusos defeituosos em envelopes de 500 parafusos”.

(69.1) Calcule E(x) e V(x).

(69.2) Suponha que se compre 100 destes envelopes. Quantos defeituosos deve-se esperar?

(70) Uma distribuição binomial tem média igual a 3 e variância igual a 2. Calcule P(X = 2).

(71) Em um experimento binomial com 3 provas, a probabilidade de exatamente 2 sucessos é 12 vezes a probabilidade de 3 sucessos. Determine o valor de “p”.

(72) Em uma urna existem 18 bolas brancas e duas pretas. Calcule as probabilidades de retiradas 7 bolas, sair apenas uma bola preta, nos seguintes casos:

(72.1) As bolas são repostas na urna após as retiradas.

(72.2) As bolas não são repostas na urna após as retiradas.

(73) Uma loja tem um lote de 10 fechaduras, das quais 5 têm defeitos. Se uma pessoa comprar 3 fechaduras, qual a probabilidade de encontrar no máximo uma defeituosa?

(74) Se X tiver uma distribuição de Poisson com parâmetro α, e se P(X = 0) = 0,20, calcular P(X > 2).

(75) As chegadas de petroleiros a uma refinaria a cada dia ocorrem segundo uma distribuição de Poisson com parâmetro $\alpha = 2$. As atuais instalações podem atender, no máximo, a 3 petroleiros por dia. Se mais de 3 aportarem por dia o excesso é enviado para outro porto.

(75.1) Qual a probabilidade de se enviar petroleiros para outro porto?

(75.2) De quanto deverão ser aumentadas as instalações para permitir atender a todos os navios que chegarem pelo menos em 95% dos dias?

(75.3) Qual o número médio e qual o desvio padrão do número de petroleiros que chegam por dia?

(76) Suponha que um comprador precisa decidir se vai aceitar ou não um lote de itens. Para tal, ele retira uma amostra de tamanho “n” do lote e conta o número “x” de defeituosos. Se $x \le a$, o lote é aceito e se $x > a$, o lote é rejeitado. O número “a” é fixado pelo comprador. Suponha que n = 19 e a = 2. Determine a probabilidade de se aceitar o lote para as seguintes proporções de defeituosos no lote:

(76.1) p = 0,20 **(76.2)** 0,10 **(76.3)** 0,05

(77) Uma cia de seguros descobriu que somente cerca de 0,1 por cento da população está incluída em certo tipo de acidente por ano. Se seus 10 000 segurados são escolhidos, ao acaso, na população, qual é a probabilidade de que não mais do que 5 de seus clientes venham a estar incluídos em tal acidente no próximo ano?

(78) Uma variável aleatória contínua tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$f(x) = 3x^2$ se $0 < x < 1$
$= 0$ caso contrário.

Calcular a probabilidade dessa variável assumir um valor maior ou igual a 1/3.

(79) Sendo $f(x) = kx^3$ a densidade de uma variável aleatória contínua no intervalo $0 < x < 1$, determine o valor de “k”.

(80) Uma variável aleatória contínua X é definida pela seguinte função densidade:

$f(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2$ para $0 \le x < 2$. Determinar:

(80.1) A média **(80.2)** A variância

(81) Uma variável aleatória contínua tem a seguinte fdp: $f(x) = \begin{cases} 2kx & \text{se } 0 \le x < 3; \\ kx & \text{se } 3 \le x < 5; \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$

Determinar o valor de k, a média, a mediana e a variância da variável aleatória.

(82) Uma variável X é uniformemente distribuída no intervalo [10, 20]. Determine a expectância e a variância de X e calcule ainda a P(12,31 < X < 16,50).

(83) Suponha que X seja uniformemente distribuída entre $[-\alpha, \alpha]$, onde $\alpha > 0$. Determinar o valor de α de modo que as seguintes relações estejam satisfeitas:

(83.1) $P(X > 1) = 1/3$ **(83.2)** $P(X < 1/2) = 0,7$

(84) Suponha que um mecanismo eletrônico tenha um tempo de vida X (em unidades de 1000 horas) que é considerado uma variável aleatória com fdp dada por:

$f(x) = e^{-x}$, $x > 0$

$= 0$, caso contrário.

Suponha ainda que o custo de fabricação de um item seja 2,00 um e o preço de venda seja 5,00 um. O fabricante garante total devolução se $x \le 0,8$. Qual o lucro esperado por item?

(85) Uma lâmpada tem duração de acordo com a seguinte densidade de probabilidade:

$f(t) = 0,001e^{-0,001t}$ para $t > 0$

$= 0$ caso contrário

Determinar

(85.1) A probabilidade de que uma lâmpada dure mais do que 1200 horas.

(85.2) A probabilidade de que uma lâmpada dure menos do que sua duração média.

(85.3) A duração mediana.

(86) Se as interrupções no suprimento de energia elétrica ocorrem segundo uma distribuição de Poisson com a média de uma por mês (quatro semanas), qual a probabilidade de que entre duas interrupções consecutivas haja um intervalo de:

(86.1) Menos de uma semana. **(86.2)** Mais de três semanas.

(87) Se X : N(10, 2) Calcular:

(87.1) $P(8 < X < 10)$ **(87.2)** $P(9 \le X \le 12)$ **(87.3)** $P(X > 10)$ **(87.4)** $P(X < 8$ ou $X > 11)$

(88) Se X tem uma distribuição normal com média 100 e desvio padrão 10, determine:

(88.1) $P(X < 115)$ **(88.2)** $P(X \ge 80)$ **(88.3)** $P(X > 100)$

(88.4) O valor de "a" tal que $P(100 - a \le X \le 100 + a) = 0,9544$

(89) Na distribuição $N(\mu; \sigma)$, encontre:

(89.1) $P(X < \mu + 2\sigma)$ **(89.2)** $P(|X - \mu| \le \sigma)$

(89.3) O número "a", tal que $P(\mu - a\sigma < X < \mu + a\sigma) = 0,90$

(89.4) O número "a", tal que $P(X > a) = 0,95$

(90) A alturas de 10000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal com média de 170 cm e desvio padrão de 5 cm.

(90.1) Qual o número esperado de alunos com altura superior a 1,65 m?

(90.2) Qual o intervalo simétrico em torno da média, que conterá 75% das alturas dos alunos?

(91) As vendas de determinado produto têm distribuição aproximadamente normal, com média de 500 e desvio padrão de 50. Se a empresa decide fabricar 600 unidades no mês em estudo, qual é a probabilidade de que não possa atender a todos os pedidos desse mês, por estar com a produção esgotada?

(92) O número de pedidos de compra de certo produto que uma cia recebe por semana distribui-se normalmente, com média 125 e desvio padrão de 25. Se em uma dada semana o estoque disponível é de 150 unidades, qual é a probabilidade de que todos os pedidos sejam atendidos? Qual deveria ser o estoque para se tivesse 99% de probabilidade de que todos os pedidos fossem atendidos?

(93) Uma enchedora automática de garrafas de refrigerantes está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de 1000 cm^3, com desvio padrão de 10 cm^3. Pode-se admitir que a distribuição da variável seja normal.

(93.1) Qual a percentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que 990 cm^3?

(93.2) Qual a percentagem de garrafas em que o volume do líquido não se desvia da média em mais do que dois desvios padrões?

(93.3) O que acontecerá com a percentagem do item (b) se a máquina for regulada de forma que a média seja 1200 cm^3 e o desvio padrão 20 cm^3?

(94) O diâmetro de certo tipo de anel industrial é uma variável aleatória com distribuição normal de média 0,10 cm e desvio padrão 0,02 cm. Se o diâmetro do anel diferir da média de mais do que 0,03 cm, ele é vendido por R$ 5,00, caso contrário, é vendido por R$ 10,00. Qual o preço médio de venda de cada anel?

(95) Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos elétricos D_1 e D_2, tenham distribuições N(42; 6) e N(45; 3), respectivamente. Se o aparelho é para ser utilizado por um período de 45 horas, qual aparelho deve ser preferido? E se for por um período de 51 horas?

(96) A distribuição dos pesos de coelhos criados em uma granja pode muito bem ser representada por uma distribuição normal, com média de 5 kg e desvio padrão de 0,8 kg. Um abatedouro comprará 5000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso, do seguinte modo: 20% dos leves como pequenos, os 55% seguintes como médios, os 15% seguintes como grandes e os 10% mais pesados como extras. Quais os limites de pesos para cada classificação?

(97) Uma distribuição normal tem desvio padrão igual a 5 e é tal que 1,5% dos valores estão abaixo de 35. Determine sua média.

(98) Numa prova de vestibular com 50 questões objetivas de 5 alternativas cada, qual a probabilidade de que um candidato, que responde ao acaso (chuta) todas as questões, acerte mais do 15 questões?

(99) Um dado equilibrado é lançado 120 vezes. Determinar a probabilidade que a face 4 (quatro) apareça:

(99.1) 18 vezes ou menos **(99.2)** Mais de 14 vezes

(100) No lançamento de 30 moedas equilibradas, qual a probabilidade de saírem:

(100.1) Exatamente 12 caras? **(100.2)** Mais de 20 caras?

(101) Uma variável aleatória tem média igual a 5 e desvio padrão igual a 3. Determine:

(101.1) $P(|X - 5| \leq 3)$ **(101.2)** h tal que $P(|X - 5| > h) = 0{,}01$

(101.3) $P(-1 \leq X \leq 11)$ **(101.4)** $P(|X - 5| \leq 7{,}5)$

(102) Supondo que a média de uma variável aleatória X seja igual a 4 e o desvio padrão igual a 2, determine:

(102.1) A probabilidade de X estar no intervalo de **0** a **8**. **(102.2)** Qual o valor mínimo de $P(-2 \leq X \leq 10)$.

5. RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

(01) 81

(02) 30

(03) 175 760 000

(04) **(04.1)** 720 **(04.2)** 120 **(04.3)** 24 **(04.4)** 480

(05) 10

(06) **(06.1)** 576 **(06.2)** 288 **(06.3)** 48

(07) 4 294 967 296

(08) **(8.1)** n(n - 1) / 2 **(8.2)** n(n - 1)(n - 2) / 6.

(09) **(09.1)** C(m, p) **(09.2)** $C(m_1, p_1)C(m_2, p_2)C(m_3, p_3)C(m_4, p_4)$ **(09.3)** $C(m - m_1, p)$.

(10) **(10.1)** 360 **(10.2)** 1296

(11) **(11.1)** 54 **(11.2)** 17 **(11.3)** 10 **(11.4)** 7 **(11.5)** 15 **(11.6)** 3 **(11.7)** 12 **(11.8)** 1

(12) S = { cccc, ccck, cckc, ckcc, kccc, cckk, ckkc, kkcc, ckck, kckc, kcck, kkkc, kkck, kckk, ckkk, kkkk},

(13) S = { BC, BK, VB, VV}, onde C = cara e K = coroa.

(14) S = { AA, ACC, ACBB, BB, BCC, BCAA, ACBA, BCAB }

(15) S = { (c, 1), (c, 2), ..., (c, 6), (k, 1), (k, 2), ..., (k, 6) }, onde c = cara e k = coroa.

(16) **(16.1)** $A \cap \overline{B} = A - B$ **(16.2)** $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B - A \cap B$ **(16.3)** $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

(17) A = { (3,6), (4, 5), (5, 4), (6,3)}

B = { (4,1), ..., (4, 6), (5, 1), ..., (5, 6), (6, 1), ..., (6, 6) }

$A \cup B$ = { (3, 6), (4,1), ..., (4, 6), (5, 1), ..., (5, 6), (6, 1), ..., (6, 6) }

$A \cap B$ = { (4, 5), (5, 4), (6, 3) }

$\overline{A}$ = São 32 pares excetuando-se os pares de A acima.

(18) **(18.1)** 35/132 = 26,52% **(18.2)** 70/132 = 53,03% **(18.3)** 42/132 = 31,82% **(18.4)** 62/132 = 46,97%

(19) **(19.1)** 35/144 = 24,31% **(19.2)** 70/144 = 48,61% **(19.3)** 49/144 = 34,03% **(19.4)** 74/144 = 51,38%

(20) **(20.1)** Não, pois $P(A \cap B) \neq \varnothing$ **(20.2)** 0,20 **(20.3)** **(a)** 0,95 **(b)** 0,15 **(c)** 0,05 **(d)** 0,65

(21) **(21.1)** x + y - z **(21.2)** 1 - x **(21.3)** 1 - y **(21.4)** z/y **(21.5)** 1 - z **(21.6)** 1 - x + z **(21.7)** y - z **(21.8)** x - z **(21.9)** 1 - x - y + z **(21.10)** (1 - x - y + z) / (1 - y)

(22) 10/14 = 5/7 = 71,43%

(23) 0,92 = 92%

(24) **(24.1)** 11/20 = 55% **(24.2)** 2/20 = 10%

(25) 0,12 = 12%

(26) **(26.1)** Não, pois P(A) + p(B) ≠ P(AUB) **(26.2)** 0,20 = 20% **(26.3)** Sim, pois $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ **(26.4)** P(A/B) = 0,50 e P(B/A) = 0,40

(27) **(27.1)** 72/1892 = 3,81% **(27.2)** 630/1892 = 33,30% **(27.3)** 378/1892 = 19,98% **(27.4)** 602/1892 = 31,82%

(28) Não

(29) Não

(30) 43/91 = 47,25%

(31) 2/5 = 40%

(32) (a) Sem reposição

Resultados	Probabilidades
PP	6/56
PV	15/56
VP	15/56
VV	20/56
Total	**1**

(b) Com reposição

Resultados	Probabilidades
PP	9/64
PV	15/64
VP	15/64
VV	25/64
Total	**1**

(33) 5/9 = 55,56%

(34) **(34.1)** 5/9 **(34.2)** 2/3

(35) **(35.1)** 1- p - q + pq = (1 - p)(1 - q) **(35.2)** p + q - pq

(36) 90%

(37) **(37.1)** 75% **(37.2)** 20% **(37.3)** 30% **(37.4)** 15% **(37.5)** 92,50% **(37.6)** 7/13 = 53,85%

(38) **(38.1)** 0,125 **(38.2)** Há dependência

(39) 0,40 = 40% e 0,60 = 60%

(40) 3/28 = 10,71%

(41) **(41.1)** 0,125 = 12,50% **(41.2)** 0,729 = 72,90%

(42) p(1 - q) + (1 - p)q

(43) 14%

(44) **(44.1)** p = 0,30 **(44.2)** p = 0,50

(45) 86%

(46) 64%

(47) 87%

(48) 10/17 = 58,82%

(49) 4/7 = 57,14%

(50) 49/104 = 47,12%

(51) 2/3 = 66,67%

(52)

x	0	1	2	3
f(x)	1/56	15/56	30/56	10/56

(53)

x	0	1	2	3
f(x)	125/216	75/216	15/216	1/216

(54)

x	1	2	3	4
f(x)	1/4	1/4	1/4	1/4

$\mu = 2,50$ $\sigma^2 = 1,25$

(55)

x	5	6	7	8
f(x)	0,40	0,30	0,20	0,10

(56)

x	3	4	5	6	7
f(x)	1/35	3/35	6/35	10/35	15/35

$\mu = 6$ mo = 7

$\sigma^2 = 1,20$ $\sigma = 1,10$

(57)

x	6	y
f(x)	1/4	3/4

$\mu = 6/4 + 3y/4 = 0 \Rightarrow y = -2$

Ele deve pagar R$ 2,00

(58) R$ 140

(59) **(59.1)** $\mu = 4,60$

(59.2)

g	4,0	3,5	3,0	2,5	2
f(g)	0,10	0,10	0,30	0,20	0,30

$\mu = 2,75$ $\sigma^2 = 0,4125$

(60) 925 vezes.

(61)

x	0	1	2	3	4
f(x)	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

$\mu = 2$ $\sigma^2 = 2$

(62)

x	1	2	3	4
f(x)	0,1	0,2	0,3	0,4

$\mu = 3$ $\sigma^2 = 1$

(63) A bolsa com expectativa de renda de 3,21% ao mês contra os 3% ao mês do CDB.

(64) Prejuízo de R$ 1000

(65) **(65.1)** **(a)** 14,16% **(b)** 84,93% **(c)** 99,98% **(65.2)** 16%

(66) 10,94%

(67) Não

(68) 90,42%

(69) **(69.1)** E(X) = V(x) = 14,55 **(69.2)** 1500

(70) 23,41%

(71) p = 1/5 = 0,20

72) **(72.1)** 37,20% **(72.2)** 47,89%

(73) 50%

(74) 21,90%

(75) **(75.1)** 14,29% **(75.2)** 2 **(75.2)** 2

(76) **(76.1)** 23,69% **(76.2)** 70,54% **(76.3)** 93,35%

(77) 7,78% (pela normal) 6,71% (pela Poisson)

(78) $P(X > 1/3) = 26/27$

(79) k = 4

(80) **(80.1)** E(X) = 1 **(80.2)** $\sigma^2 = 0,60$

(81) 1/17; 2,98; 2,92 e 1,50

(82) E(X) = 15 V(X) = 8,33 $P(12,31 < X < 16,50) = 41,90\%$

(83) **(83.1)** 3 **(83.2)** 5/4

(84) $5e^{-0,8} - 2 = 0,25$ um

(85) **(85.1)** 30,12% **(85.2)** 63,21%. **(85.3)**

(86) (86.1) 22,12%	**(86.2)** 47,24%		
(87) (87.1) 34,13%	**(87.2)** 53,28%	**(87.3)** 50%	**(87.4)** 46,72%
(88) (88.1) 93,32%	**(88.2)** 97,72%	**(88.3)** 50%	**(88.4)** a = 20
(89) (89.1) 97,72%	**(89.2)** 68,26%	**(89.3)** 1,645	**(89.4)** $a = \mu - 1{,}645\sigma$
(90) (90.1) 8413	**(90.2)** (164,25; 175,75)		
(91) 0,0228 = 2,28%			
(92) (92.1) 84,13%	**(92.2)** 184		
(93) (93.1) 15,87%	**(93.2)** 95,44%	**(93.3)** Não se altera	
(94) 9,33 u.m.			
(95) $P(D_1 > 45) = 30{,}85\%$	$P(D_1 > 51) = 6{,}68\%$		
$P(D_2 > 45) = 50\%$	$P(D_2 > 51) = 2{,}28\%$		
(96) 4,33 kg; 5,54 kg e 6,02 kg			
(97) 45,85			
(98) 2,62%			
(99) (99.1) 35,57%	**(99.2)** 91,15%		
(100) (100.1) 8,11% (8,06% exato)		**(100.1)** 2,22% (2,14% exato)	
(101) (101.1) Zero	**(101.2)** h = 30	**(101.3)** 75%	**(101.4)** 84%
(102) (102.1) 3/4 = 75%	**(102.2)** 8/9 = 88,89%		

6. REFERÊNCIAS

[BAC75] BACHX, Arago de C., POPPE, Luiz M. B., TAVARES, Raymundo N. O. *Prelúdio À Análise Combinatória*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.

[BAR72] BARBOSA, Ruy Madsen. *Combinatória e Probabilidades*. São Paulo: Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), 1972.

[BUS86] BUSSAB, Wilton O, MORETTIN, Pedro A. *Estatística Básica*. 3ª ed. São Paulo: Atual, 1986.

[COS74] COSTA NETO, Pedro Luís de Oliveira, CYMBALISTA, Melvin. *Probabilidades: resumos teóricos, exercícios resolvidos, exercícios propostos.* São Paulo: Editora Edgard Blücher , 1977.

[FEL68] FELLER, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications (vol. 1).* John New York: Wiley & Sons, 1968. 509 p.

[FON80] FONSECA, Jairo Simon da, MARTINS, Gilberto de Andrade. *Curso de Estatística*. São Paulo: Atlas, 1980.

[GUE81] GUELLI, Cid A., IEZZI, Gelson, DOLCE, Osvaldo. *Álgebra II: Análise combinatória, probabilidade, matrizes, determinantes e sistemas lineares*. São Paulo: Editora Moderna, 1981.

[HAZ77] HAZZAN, Samuel. *Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidades*. São Paulo: Atual, 1977.

[HIL88] HILLIER, Frederick S., LIEBERMAN, Gerald J. *Introdução à Pesquisa Operacional*. São Paulo: Campus e Editora da Universidade de São Paulo, 1988.

[HOF80] HOFFMAN, Rodolfo. *Estatística para Economistas*. São Paulo: Pioneira, 1980.

[LIP74] LIPSCHUTZ, Seymour. *Teoria e Problemas de Probabilidade*. São Paulo: McGraw-Hill, 1974. 225 p.

[MAR87] MARKLAND, Robert E., SWEIGART, James R. *Quantitative Methods: Applications to Managerial Decision Making*. New York: John Wiley & Sons, 1987. 827p.

[MAS90] MASON, Robert D., DOUGLAS, Lind A. *Statistical Techniques in Business And Economics*. IRWIN, Boston, 1990.

[MEY78] MEYER, Paul L. *Probabilidade: aplicações à Estatística.* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.

[MIL90] MILLER, Charles D., HEEREN, Vern E., HORNSBY Jr., E. John. *Mathematical Ideas*. USA: Harper Collins Publishers, 1990.

[NOG75] NOGUEIRA, Rio. *Análise Combinatória*. São Paulo: Atlas, 1975.

[REA93] *The Statistics Problem Solver*. Research and Education Association, Piscataway, New Jersey, 1993.

[ROT91] ROTHENBERG, Ronald I. *Probability and Statistics*. Orlando (FL), Hartcourt Brace Jovanovich Publishers, 1991.

[ROS85] ROSS, Sheldon M. *Introduction to Probability Models*. Orlando (FL): Academic Press, 1985, 502 p.